

343429

成都工学院图书馆

基本馆藏

现代应用数学丛书

网络拓扑学

〔日〕近藤一夫 小野寺力男 著



上海科学技术出版社

統一書號 13119·518

定 價 0.46 元

现代应用数学丛书

网络拓扑学

〔日〕 近藤 一夫 著
小野寺 力男
張 志 設 剛 譯校
陸 志 剛 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。用网络为中心讲述一维复形的拓扑理论的应用。全书共分5章,前两章介绍网络接續理論,第3章叙述树和反树,4、5两章介绍网络的拓扑分析及其变换。可供数学工作者,电子学工作者参考。

现代应用数学丛书

网 絡 拓 扑 学

原书名 回路のトポロジー
原著者 [日] 近藤一夫 小野寺力男
原出版者 岩波书店, 1958
译者 張 設
校者 陆 志 剛

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出 003 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 2 18/32 字数 57,000

1963 年 7 月第 1 版 1963 年 4 月第 1 次印刷

印数 1·5,300

统一书号: 13119·518

定 价: (十四) 0.46 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册,分成A、B两组,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分組編号,陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广,其内容都和現代科学技术密切有关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要内容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陸續出版的,写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最近发展状况,并对全书内容作一些評价,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志,为提高书籍的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

书 名	原 作 者	译 者	书 名	原 作 者	译 者
代 数 学*	弥永昌吉等	熊金淹	非线性振动论*	古屋 茂	吕紹明
几 何 学*	矢野健太郎	孙澤瀛	力学系与 力 映 射 理 论	岩田 义一	孙澤瀛
复变函数论*	功力金二郎	刘书琴	平面弹性论*	森口 繁一	刘亦珩
集合·拓扑·测度*	河田 敬义	賴英华	有限变位弹性论*	山本 替之夫	刘亦珩
泛函分析*	吉田 耕作	程其襄	变形几何学	近藤 一夫	刘亦珩
广义函数*	岩 村 联	楊永芳	塑性论*	鷲津文一郎	刘亦珩
常微分方程*	福原滿洲雄	張庆芳	粘性流体理论*	谷 一 郎	刘亦珩
偏微分方程*	南云道夫	錢端仕	可压缩流体理论*	河村 龙馬	刘亦珩
特殊函数*	小谷正雄等	錢端仕	网络理论*	喜安善市等	陆志刚
差分方程*	福田武雄	穆鴻基	自动控制理论*	喜安善市等	翟立林
富里哀变换与 拉普拉斯变换	河田 龙夫	錢端仕	网络拓扑学*	近藤 一夫	張 設
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生	信 息 论*	喜安善市等	李文清
李 群 论*	岩 堀 长 庆	孙澤瀛	推断统计过程论	北川 敏男	刘璋温
随机过程*	伊 藤 清	刘璋温	统计分析*	森口 繁一	刘璋温
回轉群与对称 群的 应用	山内恭彦等	張质賢	試驗設計法*	増山元三郎	刘璋温
結晶統計与代数*	伏見 康治	孙澤瀛	群体遗传学的 数 学 理 论	木村 資生	刘祖洞
偏微分方程 的 应 用	犬井鉄郎等	楊永芳	博 奕 论*	官澤 光一	張毓麟
微分方程的 近似解法	加藤敏夫等	王占瀛	线性规划*	森口 繁一等	刘源强
数值計算法*	森口 繁一等	閻昌齡	經濟理論中的 数 学 方 法	安井琢麿等	談祥柏
量子力学中 的 数 学 方 法	朝永振一郎	周民强	随机过程的应用*	河田 龙夫	刘璋温
工程力学系統*	近藤 一夫等	刘亦珩	計算 技 术	高桥 秀俊	姚 晋
			穿孔卡计算机	森口 繁一	刘源强

注：有 * 者已經出版

譯 者 序

近年来, 1 維复形的代数拓扑学的理論在各种实用技术問題特别是在电网络問題上的应用产生了显著的成效。

电网络的拓扑分析的基本原理大体上有两个要点。首先是 Kirchhoff 定律的拓扑形式的概括。如果把点电源和电路的分枝各看做 0 維和 1 維的单形, 把电位、电流等等当做这些单形所附带的系数, 那末在一般系数的同調群的概念下, 古典的 Kirchhoff 定律无非是一种同調关系。于是解一个电网络时, 可把原来网络中的某些部分換成同調的或者反同調的假想的元素組合, 使网络的結構簡化, 便于計算。其次是用同調和反同調的对偶性來說明不同規律間的邏輯关系。这使許多問題在对偶的考察下得到解决。

除电网络以外, 跟 1 維复形的概念有着明显联系的实际問題还很多, 不过电网络問題无疑是現代拓扑学理論能够全面深入地应用的一个典型的領域, 別的問題有些所牽涉的仅仅是比較直观的拓扑学原理, 而有些則还不能从現代拓扑学理論找到足够有效的工具。例如桁架的应力分析問題, 这里由于单形的系数是向量, 相应的代数結構大大地复杂化了。要拓扑学方法在这些問題上取得滿意的成績还有待于拓扑学理論本身的充实和提高。

这本“网络的拓扑学”就是用电网络做中心来陈述 1 維复形的拓扑学理論的应用的。抽象的拓扑学理論的这种实际应用无疑将吸引許多人的兴趣。但是, 現有的拓扑学理論还没有充分地被利用, 特别是关于高維复形的理論是如此。这当然不是說明这些理論本质上脱离实际。在电磁場和基本粒子場中頻繁出現的那些高維的对偶的代数結構显然不是跟代数拓扑学的概念无关的, 在这

些領域中善于运用已有的知識无疑是科學家們應盡的責任。

本書的作者和他們在日本的同行們在所謂網絡拓撲學這個研究領域中形成了一個活躍的學派，他們的興趣側重在同調和反同調的對偶性質的闡發上。本書的編排形式也鮮明地表現了他們的風格。由於反同調理論的重大意義，本書的這個特點是值得肯定的。不過敘述上的過分簡略是不能不叫人遺憾的。第1章關於同調理論的概述很難讓一個未掌握拓撲學知識的讀者領會要點。這些基本知識，讀者可以參看江澤涵譯拓撲學（商務，1950），至於反同調的概念的詳細說明，則可參看新近出版的 P. J. Hilton 和 S. Wylie 的 Homology theory (Cambridge, 1960。有中譯本，〈同調論〉江澤涵等譯，上海科學技術出版社即將出版) 一書。以下各章無論對基本理論或例子的敘述都顯得不够詳細，特別是對一些所用到的名詞的定義沒有應有的說明。譯者在一些地方加了注解，並且改正了一些錯字。

此外，對名詞的譯法有一點聲明。這里也學 Hilton-Wylie 書里的辦法，採用 M. M. Постников 和 В. Г. Болтянский 的建議，把傳統的語頭“co”（共）一概改做“contra”（反）。因此原書里的 コホモロジー (cohomology)，雙對鎖 (cochain)，雙對輪體 (cocycle)，補木 (cotree) 等都譯為反同調，反鏈，反圈，反樹等等。根據這些名詞的現有涵義，這樣譯法也許是國內的拓撲學家們所許可的。

譯者對拓撲學和電工學都外行，譯得不妥當或者錯誤的地方還希望大家指正。

張 設

序

拓扑学的誕生都說是因 Königsberg 的桥的問題引起的。原来,东普魯士的首府 Königsberg 市内,有七座桥架在那些夹着島屿的三汊河口附近。关于这七座桥的一笔画經過当时著名的大数学家 L. Euler (1707~1783) 解說以后成了多面体理論。不过象今天这样的系統性的研究实际上还得认为起始于 G. Cantor (1879) 和 H. Poincaré (1895)。最近,受拓扑学的洗礼几乎成了現代数学的特色,尤其是多才的 Poincaré 的組合拓扑学,因为是拓扑学的原动力,越发显得地位很高。現在跑到这个高峰上去穷目千里当然不是沒有意义的事。不过毕竟許多人是沒有必要完全严密地理解而且熟习拓扑学的,所以假如能够充当一座从应用数学通向实用方面的桥梁的話,本书的目的也就算达到一半了。

拓扑学是連續的几何学,是研究在一对一可逆連續变换下不变的图形性质和連續变换本身的學問。把所謂組合拓扑学的基本概念全面地总结起来的有 O. Veblen 的著作^[1],那书就是我們这些从事应用工作的人看起来也是明白易懂的。这里要談的專門是网络拓扑学。网络是所謂 1 維复形的一种組合对象,构成网络的不仅有电工学中的电流网络,电通网络,磁通网络,而且还有流速网络,振動系統,通信网络,继电器网络,自动控制网络,Markoff 过程,分子結構式等等不胜枚举。电流网络尤其是拓扑学的好对象,依电气工程家說起来,所謂代数复形的拓扑学无非是把一向称为 Kirchhoff 定律的那个熟悉的概念加以組織推广而成的东西^[2]。本书就用这方面的具体叙述当中心,其他的应用还得等以后的研究。

关于网络的拓扑分析近年来岡田,小野寺,宮崎, Percival 等人从电工学的立場做了不少闡发,我們想稍許組織一下,在这里介紹一部分。

在工程技术上更重視的是所謂网络构成問題。这是为了某种使用目的而設計具有相应的特定性能的电网络等等的問題。把网络的接續关系考虑在內的拓扑构成理論目前受到热烈注意,尤其是含有理想变压器的电流网络的构成問題最有兴趣。此外在接点网络,整流器网络的构成方面考虑到拓扑性质的研究也屡見成效。不过这些都还是有待今后研究的領域,要在适宜于本丛书的程度上做簡洁的有系統的敘述还有困难。因此这里只強調一下它們的重要性。

按照邏輯順序,第5章的网络变换問題介在构成問題和分析問題中間。关于变换問題最近 Kron 所提倡的分裂法(diakoptics)值得注意,本書記載了它的要点。

正文里所用的指标記号本来是 n 維流形論里表示几何对象量的东西,这里沒有說明,讀者不妨当作矩陣表示法看待(参考附录1)。

我們很遺憾,多年来关心这种問題而且做了許多貢獻的岡田幸雄博士沒有参加本書的執筆。此外伊理正夫在許多地方做了重大的协助,我們要向他道謝。

近藤一夫

小野寺力男

1957年8月

目 录

出版說明

譯者序

序

第1章	网络接續的基本概念	1
§1	作为复形的网络	1
§2	代数复形和边界(反边界)	2
§3	整同調和整反同調	3
§4	独立接續,节点,枝,閉路(面),閉面(室)	7
§5	指标記号	9
第2章	网络物理量的接續理論	13
§6	一般系数的同調群和反同調群	13
§7	电流电压网络的基本公式	15
§8	桁架的結構力学	18
§9	剩余度	20
第3章	树和反树	23
§10	定义	23
§11	独立节点和原始閉路	24
§12	树和反树行列式的相对符号	26
§13	部分复形和相对拓扑,部分树和部分反树	29
第4章	网络的拓扑分析	32
§14	因果关系	32
§15	中間分析阶段	33
§16	节点电流源和閉路电压源网络的直接分析法	36
§17	直接分析法的实例	39
§18	枝电流源和枝电压源网络	42
§19	四端网络的常数	45
第5章	网络的变换	47

第 1 章 网络接續的基本概念

§ 1 作为复形的网络

网络由枝和联接枝的节点(包括孤立端和孤立点)构成,在組合拓扑学中前者叫做**1 維单形或胞 (1 单形或 1 胞)**,后者叫做**0 維单形或胞 (0 单形或 0 胞)**。在一般 n 維 ($n \geq 2$) 的情况下,把所謂**凸多面体**(作为有限个 n 維 Euclid 半空間^{[3]-59}①的共通部分的那种有界图形)叫做 **n 胞形或 n 胞**。在 0 維和 1 維的情况下,胞和单形一致。为了避免混淆,以后单形这个名称尽量避免。胞形和由胞形变形而成的曲綫图形沒有区别的必要。

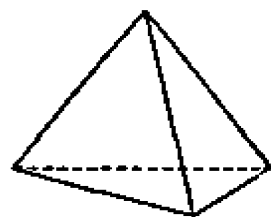


图 1.1

n 单形是 n 胞中最简单的,它是用直綫联接 $n+1$ 个点所得到的 n 維凸多面体。例如图 1.1 中的四面体是 3 单形,构成它的边界的那四个三角形都是 2 单形,那六条棱都是 1 单形,四个頂点都是 0 单形。

若若干个 n 維和較低維的胞形的集合要是有这样的性质:当一个胞形属于这个集合的时候,构成这个胞形的边界的所有的胞形也一定属于这个集合,那末称它为一个 **n 維几何复形或胞复形**。特別,当各胞形都是单形的时候叫做**单形复形**。例如正十二面体的表面就是由十二个 2 胞以及构成它們的边界的一共三十个 1 胞还有二十个 0 胞所組成的 2 維胞复形。正二十面体的表面是由二十个 2 单形和三十个 1 单形还有十二个 0 单形組成的 2 維单形复形。

① 左上角的号碼 [3]—59 表文献 [3] 的第 59 頁。下同。

§2 代数复形和边界(反边界)

把各个胞形形式地附上系数然后相加得到形式的和。这些和的全体形成一个线性向量空间,各胞形是它的基底元素。特别,纯粹由 p 胞组成的任意线性组合叫 p 维代数复形。记做 O^p , 有时候记做 C_p , 各称为 p 维链,反链或上代数复形,下代数复形(也叫代数复形,反代数复形)。 p 维代数复形全体形成一个 Abel 群(加群)。记做 C^p 或 C_p , 称为 p 链群或 p 反链群(上或下代数复形群)。

特别,如果一个上或下代数复形正好是一个 p 胞,那末记做 x^p 或 x_p ,

$$\begin{array}{c|c} x_i^p \text{ 和 } x_j^{p-1} \text{ 的联接状态用} & x_{p+1}^k \text{ 和 } x_p^l \text{ 的联接状态用} \\ \hline [x_i^p : x_j^{p-1}] & [x_{p+1}^k : x_p^l] \end{array}$$

表示联接系数。 x_i^p 和 x_j^{p-1} (x_{p+1}^k 和 x_p^l) 不联接时,这系数是 0, 正方向联接时系数是 +1, 负方向联接时系数是 -1 (把各胞形取向的一种关联方式规定为正,和它相反的规定为负)。联接系数按号码 i 和 j 或 k 和 l 记做

$$\eta_{ij}^p(p); [x_i^{p+1} : x_j^p],$$

把它们排成矩阵,叫做第 p 个联接矩阵。常有

$$\eta_{ij}^p(p) \eta_{kl}^p(p-1) = \sum_j [x_i^{p+1} : x_j^p] [x_j^p : x_k^{p-1}] = 0 \quad (2.1)$$

这样的基本关系。

我们用

$$\sum_j [x^p : x_j^{p-1}] x_j^{p-1} = \partial x^p \quad (+2.2) \quad \left| \quad \sum_k x_{p+1}^k [x_{p+1}^k : x_p] = \delta x_p \quad (-2.2)\right.$$

来定义上 p 胞 x^p 的边界 ∂x^p . 来定义下 p 胞 x_p 的反边界。

这些 ∂x^p 和 δx_p 各是特殊的 $p-1$ 维链和 $p+1$ 维反链。当边界运算和反边界运算不需要区别时,写做

$$Fx^p (= \partial x^p), \quad (+2.2.1) \quad Fx_p (= \delta x_p), \quad (-2.2.1)$$

对一个 C^p (或 C_p) 中的各基底元素施行运算 ∂ (或 δ), 保持原来的系数, 得到一个 $p-1$ 維 (或 $p+1$ 維) 的代数复形。这叫做 C^p (或 C_p) 的代数的边界 (或代数的反边界) ①, 記做

$$\partial C^p, FC^p \text{ 或 } \delta C_p, FC_p.$$

由 (2.1), 关于运算 B ,

$$FF=0:$$

$$\partial \partial C^p = 0 \quad (+2.3) \quad \delta \delta C_p = 0 \quad (-2.3)$$

常成立。也就是边界 (反边界) 的边界 (反边界) 是 0 (不存在)。

边界 (反边界) 等于 0 的 p 維代数复形一概称做代数的 p 圈 (代数的 p 反圈) ②。 p 边界 ∂C^{p+1} (p 反边界 δC_{p-1}) 是它的特例。它們全体都构成 C^p (C_p) 的子群, 各称为 p 圈群 (p 反圈群), p 边界群 (p 反边界群)。如果各記做

$$Z^p, F^p, \quad | \quad Z_p, F_p,$$

那末显然有

$$F^p \subseteq Z^p \subseteq C^p, \quad (+2.4) \quad F_p \subseteq Z_p \subseteq C_p, \quad (-2.4)$$

代数复形的系数如果取 mod 2 的整数, 那末討論的是“不考虑方向的网络接續”, 如果取普通的正負整数, 那末是“考虑方向的网络接續”, 如果取电流电压的数值, 那末是“电流电压网络的接續”。

§3 整同調和整反同調

系数限于正負整数和零的时候, 上述的各个群記做

$$C_p^j, Z_p^j, F_p^j, \quad | \quad C_p^j, Z_p^j, F_p^j.$$

商群 ③

① 以下不一定都注明“代数的”。

② 以下不一定注明“代数的”。

③ 参考本书脉永, 杉浦:《代数学》。

$$H_p^Z = Z_p^Z / F_p^Z \quad (+3.1) \qquad H_p^J = Z_p^J / F_p^J \quad (-3.1)$$

各称为第 p 个整同調群和第 p 个整反同調群。它們不仅是拓扑学而且也是网络接續分析的中心概念。因此有必要熟悉它們的构造。

証明从略，上下整代数复形群 C_p^Z, C_p^J 各由五种独立元素所构成的基底

$$(a_p^Z, b_p^Z, c_p^Z, d_p^Z, e_p^Z) \qquad (e_p^J, d_p^J, c_p^J, b_p^J, a_p^J)$$

生成的。这基底叫做**正准基底**(或正子基)。其中

a_p^Z, b_p^Z, c_p^Z 是 p 圈,

d_p^Z, e_p^Z 是非圈的 p 鏈, 共 ω_p 个,

$a_p^Z, t_p^Z b_p^Z$ (t_p^Z 是整数 >1) 是 p 边界, 共 ρ_p 个,

c_p^Z 是非边界的 p 圈, 共 R_p 个。

d_p^Z 和 e_p^Z 的区别在于

$$a_p^{Z-1} = \partial e_p^Z, t_p^{Z-1} b_p^{Z-1} = \partial d_p^Z.$$

(+3.2)

e_p^J, d_p^J, c_p^J 是 p 反圈,

b_p^J, a_p^J 是非反圈的 p 反鏈, 共 ω_p 个,

$e_p^J, t_p^J d_p^J$ (t_p^J 是整数 >1) 是 p 反边界, 共 ρ_p 个,

c_p^J 是非反边界的反圈, 共 R_p 个。

b_p^J 和 a_p^J 的区别在于

$$t_{p+1}^J d_{p+1}^J = \delta b_p^J, e_{p+1}^J = \delta a_p^J.$$

(-3.2)

上面的分类可以由第 p 个联接矩陣 $\eta_p^J(p)$ 或第 $p+1$ 个联接矩陣 $\eta_p^J(p+1)$ 的**基本变换**①得到②。 t_p^Z 或 t_p^J 各变成它們的大于1的**不变因子**。等于1的不变因子对应于自由度 a_p^Z 或 e_p^J , $\eta_p^J(p)$ 中无关的独立圈个数是 $R^p(R_p)$ 。

显然,

① i) 任意两行(或列)的交换, ii) 一行(或列)的变号, iii) 任意行(或列)乘以共同的(整)数以后加到任意的另外一行(或列)去(参考普通的代数学教科书)。

② 詳細証明可以参考沙爱福施雷发著, 江澤涵译, 拓扑学, 下册, 第十二章, 商务印书館, 1950 再版。——譯者注

$$\begin{array}{l|l} \partial a_i^p = \partial b_i^p = \partial c_i^p = 0, & \delta e_p^i = \delta d_p^i = \delta c_p^i = 0, \\ \omega^p = \rho^{p-1}, & \rho_{p+1} = \omega_p. \end{array} \quad \begin{array}{l} (+3.3) \\ (-3.3) \end{array}$$

特別,

$$\begin{array}{l|l} \omega^0 (= \rho^{-1}) = 0, \rho^n (= \omega^{n+1}) = 0, & \omega_n (= \rho_{n+1}) = 0, \rho_0 (= \omega_{-1}) = 0. \\ (+3.4) & (-3.4) \end{array}$$

因此 p 胞 (p 反胞) 的总数 $\alpha^p = \alpha_p$ 是

$$\begin{array}{l|l} \alpha^p = \rho^p + R^p + \omega^p & \alpha_p = \rho_p + R_p + \omega_p \\ = \rho^p + \rho^{p-1} + R^p. & = \rho_p + \rho_{p+1} + R_p. \end{array} \quad \begin{array}{l} (+3.5) \\ (-3.5) \end{array}$$

把 (+3.5) 的 $n+1$ 个关系式各乘上 $(-1)^p$ 以后相加, 再考虑到 (+3.4), 就得出

$$\chi(K) \equiv \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha^p = \sum_{p=0}^n (-1)^p R^p. \quad (+3.6)$$

这是有名的 **Euler-Poincaré 公式**^{[3], [4]}, K 表示所設的复形, $\chi(K)$ 叫做它的 **Euler-Poincaré 特征数**。

p 胞和 $p+1$ 胞, $p+1$ 反胞和 p 反胞的联接矩陣相等, 所以如果考虑到边界运算使維数减少 1, 反边界运算使維数增加 1, 那末拿它們的阶数和不变因子来看就得到

$$\rho_{p+1} = \rho^p, \quad t_{p+1}^i = t_i^p. \quad (3.7)$$

因此由 (±3.5) 又得到

$$R^p = R_p. \quad (3.8)$$

$R^p (R_p)$ 叫第 p 个整 Betti 数 (第 p 个整反 Betti 数), $t_i^p (t_p^i)$ 叫第 p 个挠率数 (第 p 个反挠率数)。由不变因子理論, $t_i^p (t_{p+1}^i)$ 是 $t_{i+1}^p (t_{p+1}^{i+1})$ 的因子^{[4]-[10]}。这些 R^p, t_i^p 是下列各个群的阶数 (独立元素的个数):

$$\begin{array}{l|l} \text{由 } (+3.1), (+3.2), \text{ 对整同調群 } \dot{H}_p^{\mathbb{Z}} & \text{由 } (-3.1), (-3.2), \text{ 对整反同調群 } H_p^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

成立直和分解

$$H_p^2 = B_p^2 \oplus T_p^2,$$

其中 B_p^2 叫第 p 个整 Betti 群, T_p^2 叫第 p 个整挠率群, 各由同构关系

$$B_p^2 \cong \{c_p^2\}, T_p^2 \cong \{b_p^2\}$$

定义。前者是 R^p 阶的自由群 (由 R^p 个独立自由元素生成的加群), 后者是 t_p^2 阶的循环群^{[3]-224, [4]-101} 的直和。

$$H_p^J = B_p^J \oplus T_p^J,$$

其中 B_p^J 叫第 p 个整反 Betti 群, T_p^J 叫第 p 个整反挠率群, 各由同构关系

$$B_p^J \cong \{c_p^J\}, T_p^J \cong \{d_p^J\}$$

定义。前者是 R_p 阶的自由群, 后者是 t_p^J 阶的循环群^{[3], [4]} 的直和。

因为网络本质上是 1 维的, 如果把它当做 1 维复形来看, 那末 1 维 (最高维) 的链不会是边界圈, 0 维 (最低维) 的链不会是反边界圈, 所以

$$t_1^1 = 0, t_0^1 = 0,$$

而且因为 0 维边界圈只有那些相連的枝的两端, 所以

$$t_1^0 = t_1^1 = 0,$$

也就是挠率数和反挠率数都等于 0。因此只要考虑 Betti 群和反 Betti 群就行了 (参考下一节)。

由于不相連的两点不能組成 0 边界, 我們知道絕緣的部分 (拓扑学中的所謂成分) 的个数等于 c_0^0 。也就是第 0 个整 Betti 数 R^0 至多等于絕緣的部分的个数。同时 R^1 也就在上面的意义下定义了所謂獨立閉路 的个数。

§1 中提到的 2 单形或正十二面体、正二十面体等的表面是联接的 2 维复形, 所以 $R^0 = 1$, 而且 c_1^2 只有一个, 即它們的整个表面, 所以 $R^2 = 1$, 又閉路是 2 胞的集合的边界, 所以 $R^1 = 0$, 因此挠率群是空的。所以 Euler-Poincaré 特征数是

$$\chi(K) \equiv R^2 - R^1 + R^0 = R_2 - R_1 + R_0 = 2. \quad (\pm 3.9)$$

如果写成 $\alpha^0 = V$, $\alpha^1 = E$, $\alpha^2 = F$, 那末

$$V - E + F = 2. \quad (+3.9.1)$$

这就是所謂 Euler 的多面体公式, 滿足这公式的多面体叫 Euler 多面体, 跟球面同胚^[3]。

§4 独立接續①, 节点, 枝, 閉路(面), 閉面(室)

在电工学里, 所謂閉路意思是明白的, 不过这里我們定义如下。

如果 $z^1 = \sum_i x_i^1$ 是 1 維圈, z^1 的任何真子集都不是 1 維圈, 那末說 z^1 是閉路。同样, 如果 $z^2 = \sum_i x_i^2$ 是 2 維圈, z^2 的任何真子集都不是 2 維圈, 那末叫 z^2 做閉面。同样可定义一般的 p 閉路。

如果把一个网络中的一个閉路用面張滿, 那末就产生一个以这閉路当边界的 2 維胞。如果一些这样的 2 維胞构成一个閉面, 那末又可以造一个用这閉面当边界的 3 維胞。一般, 当 $p \geq 1$ 的时候, p 維閉路总可以用一个拿它当边界的 $p+1$ 維胞來張滿^{[5]-179}。从一个复形出发, 用这样方式增加維数, 造成一个其中所有的 p 維閉路 ($p \geq 1$) 从而所有的 p 維圈都成为边界的复形时, 这个所得到的复形中最高維的边界圈不存在(假如有的話, 还可以再提高一維)。至于 0 維, 仅仅一点就是一个圈, 要考慮以它为边界的 1 維胞是不可能的。

在网络物理中, 把 1 維当做中心而对比 0 維和 2 維的这样一种对偶叙述方式是方便的, 所以我們先不把 2 圈(閉面)边界化, 而把我們的对象看做 2 維复形, 把它的各种要素用表 4.1 所列的名字来称呼②。

① 独立接續就是絕緣的部分, 也就是成分。作者用到这名词的时候都沒有下定义。这里先代注明。——譯者注

② 这里为了方便只在 1 維的情形下称星形。

表 4.1

p (維)	0	1	2	
p 胞	点	枝	面	
边 界	独立接續里的点对*	閉 路†	—	非反圈的反鏈
非边界的圈	一个点, 不相連的点对	—	閉面(室)	非反边界的反圈
非 圈	—	(非閉路)星形**	非閉面††	反边界

* 和 **, † 和 †† 构成同构的集合(群)。同調群和反同調群都只在 0 維和 2 維的时候有, 而且提高到 2 維的过程是象上面所說那样的, 所以沒有撓率群和反撓率群^①:

$$H_j^0 = B_j^0, \quad Z_j^1 = F_j^1, \quad H_j^2 = B_j^2;$$

$$H_0^j = B_0^j, \quad Z_1^j = F_1^j, \quad H_2^j = B_2^j;$$

$$R_0 = R^0, \quad R_1 = R^1 = 0, \quad R_2 = R^2,$$

$$t_p^p = t_p^q = 0 \quad (p=0, 1, 2).$$

因此网络的构造尽在于第 0 和第 2 个整 Betti 群和整反 Betti 群, 第一个边界群(\cong 第 2 个反边界群)和反边界群(\cong 第 0 个边界群)的构造。这情形下 Euler-Poincaré 公式指出

$$\alpha^1 = (\alpha^0 - R^0) + (\alpha^2 - R^2), \quad \left| \quad \alpha_1 = (\alpha_0 - R_0) + (\alpha_2 - R_2) \right. \\ (+4.1) \quad \quad \quad (-4.1)$$

这反映了这样一个事实: 在工程上对任何一枝都可以指定独立的性质, 因此网络的独立元素的个数必須由此决定。上面等式的左边的“枝数 $\alpha^1 (= \alpha_1)$ ”是右边的“所謂独立閉路的数目

$$k (= \rho^1 = \omega^2) = \alpha^2 - R^2$$

(独立的非閉面的数目 $\rho_2 = \alpha_2 - R_2$)”跟“所謂独立点的数目

$$m (= \rho^0 = \omega^1) = \alpha^0 - R^0$$

① $t_1^1 = 0$ (1 維时沒有非边界的圈) $\rightarrow t_2^2 = 0, t_3^3 = 0$ (在边界圈和部分复形中, 0 維圈是仅有的只有一点的鏈——Betti 群的元素) $\rightarrow t_1^1 = 0, t_2^2 = 0$ (沒有 2 維的边界), $t_0^0 = 0$ (沒有 0 維反边界)。各个面的張法經過适当選擇可以使 $R_2 = R^2 = 0$, 参考 § 13。

(独立的星形的数目 $\omega_0 = \rho_1 = \alpha_0 - R_0$)”的和。

实际的网络都是包含在 3 維空間中的，故可考虑以閉面为边界的 3 維胞，因此可以把維数提高到 3，可是更高就不可能了。換句話說，4 維图形是沒有的，所以 3 維圈从而 3 維閉路是沒有的。另一方面，可以把一个独立接續当做一个 -1 維胞看待，按是否包含在它里面而定义联接系数

$$[x^0, x^{-1}].$$

于是从 -1 維起到 3 維止以 1 維为中心可以对称地排列对比。从这观点我們称 3 維胞为**室**。它的对偶是 -1 維胞，称为**独立部分接續**。显然

$$\alpha^{-1} = \rho^{-1}, R_{-1} = R^{-1} = \omega^{-1} = \rho^{-2} = 0, R^3 = R_3 = \omega_3 = \rho_4 = 0,$$

因此 Euler-Poincaré 的关系式变成

$$\alpha^1 = (\alpha^3 - \alpha^3) + (\alpha^0 - \alpha^{-1}), \quad (+4.1.1)$$

$$k = \alpha^2 - \alpha^3, \quad m = \alpha^0 - \alpha^{-1}.$$

从这观点来看，0 維胞不一定是圈，2 維胞不一定是反圈。下一节还要从这观点来討論，不过从下一章开始如果没有特別声明，我們仍旧采取 (± 4.1) 的观点，不考虑 -1 維和 3 維。

把网络看做 2 維复形也好，看做 3 維的也好，在本书范圍中 (± 4.1) 和 $(+4.1.1)$ 是同样的，因此在本质上，結果是相同的。

第 0，第 1，第 2，第 3 个联接矩陣各叫做**絕緣矩陣**，**接續矩陣**，**閉路矩陣**或**面矩陣**，**閉面矩陣**或**室矩陣**。

§5 指标記号

到現在为止我們都是把組成网络的元素的那些单形或胞記成 x_a^0, x_x^1, x_p^2 的形式，不过下面那样的只用指标的表示法也有方便之处^[6]。今后两者并用。

表 5.1

	枝	点	閉路 (面)
自由 标 号	$\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$ $1, 2, \dots, \alpha^1$ (斜 体)	i, j $1, 2, \dots, m+R^0$ (正 体) $m(=\alpha^0-R^0)=\alpha^0-\alpha^{-1}$	k, l $m+1, m+2, \dots, m+\alpha^2$
独立接續	独立閉面(室)	独 立 点	独 立 閉 路
α, β I, II, \dots, R^0 (正 体)	γ, δ I, II, \dots, α^3 (正 体)	a, b, c, d, \dots $1, 2, \dots, m$ (正 体) $m(=\alpha^0-R^0)=\alpha^0-\alpha^{-1}$	p, q, r, s, \dots $m+1, m+2, \dots, m+k$ (正 体) $k=\alpha^2-\alpha^3$

在图 ±5.1 中, $\alpha^{-1}(=R^0)=2, \alpha^1=8, \alpha^0=6$.

$$\therefore m(=\alpha^0-R^0)=\alpha^0-\alpha^{-1}=6-2=4, k=\alpha^2-\alpha^3=6-2=4,$$

$$\alpha^1=k+m=4+4=8.$$

电工学中习用的各种联接矩陣的記号^[3]和实例列举如下①。

1.1.a+ 接續矩陣(1 維)

$$D'_{\kappa} = D_{\kappa}^{\lambda} = D'_{\lambda}; \quad (+5.1)$$

$$D'_{\kappa} = \begin{bmatrix} D^1_1 & D^1_2 & \dots & D^1_8 \\ D^2_1 & D^2_2 & \dots & D^2_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^6_1 & D^6_2 & \dots & D^6_8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(+5.2)

1.1.a- 閉路矩陣,面矩陣(2 維)

$$R^{\kappa}_{\lambda} = R^{\lambda}_{\kappa} = R^{\kappa}_{\lambda}; \quad (-5.1)$$

$$R^{\kappa}_{\lambda} = \begin{bmatrix} R^1_5 & R^1_6 & \vdots & R^1_{10} \\ R^2_5 & R^2_6 & \vdots & R^2_{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R^8_5 & R^8_6 & \vdots & R^8_{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

(-5.2)

① 參看附录。实例表示于图 ±5.1.

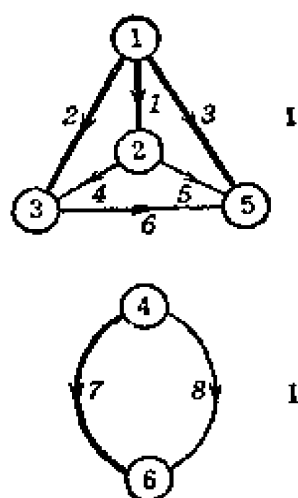


图 +5.1

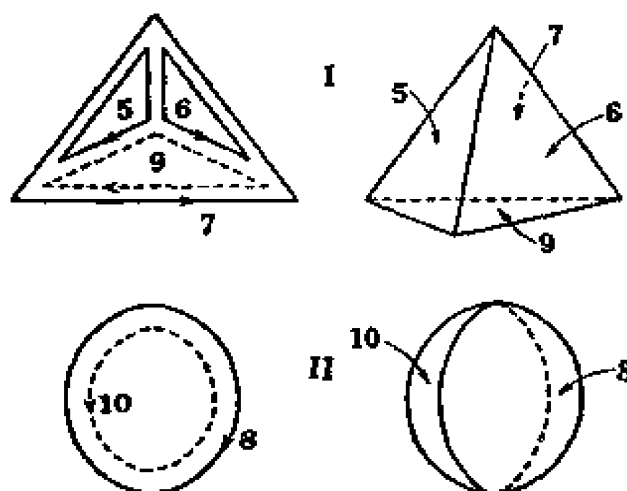


图 -5.1

这里 D^i_{κ} 是对应于場的散度 div 的概念, 当枝 κ 是从节点 i 出发时, 它取正号。 R^{κ}_k 对应于場的旋度。矩陣的元素 0 用点代替。

1.1.b+ 絕緣矩陣 (0 維)

$$d^{\alpha}_i = \begin{bmatrix} d^I_{i,1} & d^I_{i,2} & \cdots & d^I_{i,6} \\ d^{II}_{i,1} & d^{II}_{i,2} & \cdots & d^{II}_{i,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (+5.3)$$

1.1.b- 閉面矩陣, 空矩陣 (3 維)

$$r^{\kappa}_{i,\gamma} = \begin{bmatrix} r^{5,I} & r^{5,II} \\ r^{6,I} & r^{6,II} \\ \vdots & \vdots \\ r^{10,I} & r^{10,II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ -1 & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (-5.3)$$

这些矩陣分別在

$$\left. \begin{array}{l} D^i_{\kappa}: \quad \delta i, \partial \kappa \\ d^{\alpha}_i: \quad \delta \alpha, \partial i \end{array} \right\} \begin{array}{l} R^{\kappa}_k: \quad \partial k, \delta \kappa \\ r^{\kappa}_{i,\gamma}: \quad \partial r, \delta k \end{array}$$

等运算中使用。

特別, 如果所有的加法都在 $\text{mod } 2$ 下进行, 那末 $1+1=0$, $1+0=0+1=1$, $0+0=0$, $1 \times 1=1$, $1 \times 0=0 \times 1=0$, $0 \times 0=0$, 偶数都变成 0, 奇数都变成 1, 所以这些矩陣的元素 ± 1 都变成 1, 接續的方向就不在考虑之中了。

从这观点来看图 ± 5.1 ,

∂I 是室 I 的边界,即

面的組合 $(5+6+7+9)$,

$\partial 5$ 是面 5 的边界,即

枝的組合 $(1+2+4)$,

$\partial 1$ 是枝 1 的边界,即

点的組合 $(1+2)$,

$\partial 1$ 是点 1 的边界即

部分接續 I .

$$\partial(5+6+7+9)=0$$

表示面的組合 $(5+6+7+9)$ 是
2 維圈(閉面)。

$$\partial(1+2+4)=0$$

表示枝的組合 $(1+2+4)$ 是 1 維
圈(閉路)。

$$\partial(1+2)=0$$

表示点的組合 $(1+2)$ 是 0 維圈,
是同一个部分接續中的两点
組成的点对。

δI 是部分接續 I 的反边界,即

点的組合 $(1+2+3+5)$,

$\delta 1$ 是点 1 的反边界,即

枝的組合 $(1+2+3)$,

$\delta 1$ 是枝 1 的反边界,即

面的組合 $(5+6)$,

$\delta 5$ 是面 5 的反边界,即

室 I .

$$\delta(1+2+3+5)=0$$

表示点的組 $(1+2+3+5)$ 是 0
維反圈,从这一組联到其他的
点的枝不存在。

$$\delta(1+2+3)=0$$

表示枝的組合 $(1+2+3)$ 是反
圈,不存在一个面把它們联接
到别的枝上去(在 mod 2 下)。

$$\delta(5+6)=0$$

表示面的組合 $(5+6)$ 是 2 維反
圈,不存在一个室把它們联接
到别的面上去(在 mod 2 下)。

第2章 网络物理量的接續理論

§6 一般系数的同調群和反同調群

$C^p, Z^p, F^p, C_p, Z_p, F_p$ 等群都具有拓扑空間^{[3]-17}的性质, 不过在 §3, §4 内系数是普通的整数或者 mod 2 的整数, 因此具有所謂离散拓扑^{[4]-8}, 拓扑性质不大需要注意。但在本章, 要討論系数是电流, 电压, 应力(桁架的情况)等等的一般群, 所以似乎稍作一些拓扑群論的考虑是必要的。不过这問題在下述两种意义((i) 和 (ii))下化簡了。

首先, p 圈群 Z^p (或 p 反圈群 Z_p) 是——因为可以由准同构对应 F 表示做 $p-1$ 边界群 F^{p-1} (或 $p+1$ 反边界群 F_{p+1}) 的零元素 0 ——閉集。因此包含 $F^p (F_p)$ 的包^{[3]-19} (包含 F^p 或 F_p 的最小的閉集) $\bar{F}^p (\bar{F}_p)$ 。这是 $Z^p (Z_p)$ 的所謂**拓扑子群**, 因此必須用在拓扑群論上有意义的**拓扑商群**

$$H^p = Z^p / \bar{F}^p \quad (+6.1) \quad | \quad H_p = Z_p / \bar{F}_p \quad (-6.1)$$

来代替 (±3.1) 充当同調群或反同調群。它的构造也是 Betti 群 (反 Betti 群) 和撓率群 (反撓率群) 的和, 不过 Betti 数和撓率数等等都随系数集合的代数性质而异。但是可以看到, 研究这样的拓扑群的构造时, $\bar{F}^p (\bar{F}_p)$ 和 $F^p (F_p)$ 的不同仅在于撓率群的部分。可是

(i) 一般, 当系数成一个体时, $\bar{F}^p = F^p (\bar{F}_p = F_p)$ 。特別在电网络物理中所用的系数是电流电压等普通的实数和复数, 所以成一个特征数等于 0 的体。这情况下, 沒有撓率群 (反撓率群), Betti 数 (反 Betti 数) 与整 Betti 数 (反整 Betti 数) 一致。特征数等于 α 的体——任何元素的 α 倍都等于 0——的情况下撓率群 (反撓率

群)也沒有, Betti 数与在 $\text{mod } \pi$ 的整数的情况一致。

(ii) 另一方面, 无论假设系数是怎么样的, 为了使所謂网络是 1 維复形, 象 § 3, § 4 所指出的那样, 整撓率群(整反撓率群)是不出現的, 所以对有关的物理量的接續, 也沒有必要考虑撓率群。

由于这样的緣故, 下面不考虑 (± 6.1) , 只根据

$$B^p = Z^p / F^p \quad (+6.2) \quad | \quad B_p = Z_p / F_p \quad (-6.2)$$

和

$$F^p \cong C^{p+1} / Z^{p+1} \quad (+6.3) \quad | \quad F_p \cong C_{p-1} / Z_{p-1} \quad (-6.3)$$

进行討論。

用物理量当系数的一般代数复形是代表电流接續, 电压接續, 应力接續等物理量关系的。圈、边界等等也跟整同調, 整反同調情形下的几何图形的閉路、边界(或它的整数倍)不同, 是代表物理量的連續或不連續結合的。因此有时候相应地用一般的用語比較合适。例如

p 代数复形的差如果属于边界, 即

$$O^p - O'^p \in F^p,$$

那末說 O^p 和 O'^p 同調, 写做

$$O^p \simeq O'^p, \quad (+6.4)$$

特別, 如果 O^p 是边界, 写做

$$O^p \simeq 0, \quad (+6.5)$$

則說 O^p “同調于 0”。

反 p 代数复形的差如果属于反边界, 即

$$O_p - O'_p \in F_p,$$

那末說 O_p 和 O'_p 反同調, 写做

$$O_p \sim O'_p, \quad (-6.4)$$

特別, 如果 O_p 是反边界, 写做

$$O_p \sim 0, \quad (-6.5)$$

則說 O_p “反同調于 0”。

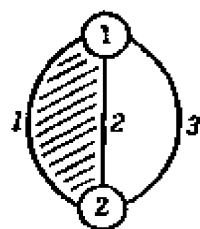


图 6.1

系数是 $\text{mod } 2$ 整数的情况当然只是几何学的接續条件的最簡單的要求, 而不是物理問題, 不过为了說明起見, 我們下面用它当例子。图 6.1 表示在画有斜綫的部分張了一个面的 2 維复形, 这里面

1 維圈 $(1+2)$ —图 6.1 左半斜綫部分的边界——同調于 0:

$$1+2 \simeq 0,$$

$$\therefore (1+3) + (2+3) \simeq 0,$$

$$\therefore 1+3 \simeq 2+3,$$

即圈 $1+3$ 同調于圈 $2+3$.

1 維反圈 $(1+2+3)$ —1 的反边界——反同調于 0:

$$1+2+3 \simeq 0,$$

$$\therefore (1+2) + 3 \simeq 0,$$

$$\therefore 1+2 \simeq 3,$$

即反圈 $1+2$ 反同調于反圈 3.

最后, 对那些与网络有关的物理量的連續条件的要求是把各种維数的代数复形或反代数复形与它们的边界或反边界联系起来的关系式

$$O^{p-1} = FC^p, \quad (+6.6)$$

$$C_{p+1} = FC_p, \quad (-6.6)$$

所以这方面的理論显然包含在同調論和反同調論里面。(± 6.6) 是它的基本方程^{[6], [8], [9]}。

§ 7 电流电压网络的基本公式

作为典型, 先拿电流网络来看, 我們得到通常所說的 **Kirchhoff 定律**。事实上, 象 § 4 末尾那样把网络看做 3 維复形然后对比两种对偶的情况, 就得到如下的結果。在下面各个例子中网络都根据图 ±7.1.

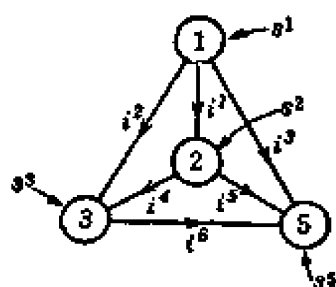


图 +7.1

Kirchhoff 第 0 定律 (0-Kh)

就是节点电源 s^i 的連續条件

$$p=0,$$

$$O^0 = s^i x_i^0,$$

$$\partial O^0 = 0:$$

$$d^a_i s^i = 0,$$

$$(+7.1)$$

$$O^0 \simeq 0,$$

Kirchhoff 第 3 定律 (3-Kh)

即閉路电动势 e_i 的連續条件

$$p=2,$$

$$C_2 = e_i x_i^1,$$

$$\delta C_2 = 0:$$

$$r^i_j e_i = 0,$$

$$(-7.1)$$

$$C_2 \simeq 0,$$

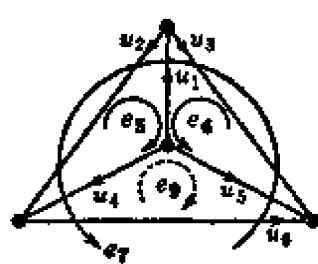


图 -7.1

这里 d_{ij}^a 是絕緣矩陣, r_{ij}^b 是閉面矩陣。在图 ±7.1 的例子中,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix} = 0.$$

Kirchhoff 第1定律 (1-Kh)

就是关于枝元素中經過的电流 i^x 和节点电流源 s^i 的連續或平衡条件

$$p=1, C^1 = i^x x_n^1, \\ \partial C^1 = C^0: D_{i,x}^1 i^x = s^i. \quad (+7.2)$$

Kirchhoff 第2定律 (2-Kh)

就是关于枝元素的电位差 u_λ 和閉路电动势 e_l 的連續或平衡条件

$$p=1, C_1 = u_\lambda x_1^\lambda, \\ \delta C_1 = C_2: R_{i,\lambda}^2 u_\lambda = e_l. \quad (-7.2)$$

这里 $D_{i,x}^1$ 是接續矩陣, $R_{i,\lambda}^2$ 是閉路矩陣。在图 ±7.1 的例子中,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \\ i^7 \\ i^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix}.$$

以上把电流接續当做上代数复形, 把电压接續当做下代数复

形处理,从而得到完全的对偶性。

表 7.1

場	上代数复形	电 流 分 布	电 压 分 布	下代数复形	場
s	$C^0 = s^i x_i^0$	s^i : 节点电流源	V_j : 节点电位	$C_0 = V_j x_j^0$	
i	$C^1 = i^x x_x^1$	i^x : 枝电流	u_x : 枝电位差	$C_1 = u_x x_x^1$	E
	$C^2 = J^k x_k^2$	J^k : 閉路电流	e_l : 閉路电压源	$C_2 = e_l x_l^2$	Φ

注意 J^k, Γ_j 参考下一节。

还可以把这些看做連續的电流和电場的分布条件在网络的离散的場上的投影, Maxwell 电磁場理論的

发散条件

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = s^+ \quad (+7.3)$$

通过对应关系

$$\operatorname{div} \rightarrow \partial \rightarrow D_i^1$$

旋轉条件

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (-7.3)$$

通过对应关系

$$\operatorname{rot} \rightarrow \delta \rightarrow R_i^2$$

得到相应的表达, 这是为什么用 D 和 R 来表示接續矩陣和閉路矩陣的主要理由。在电流源和它的附近把 (+7.3) 积分, 那末由 Gauss 定理——节点电流源和它的反边界的关系——就得到 (+7.2), 而把磁通变化 $-(\partial \mathbf{B} / \partial t) / c$ 沿閉路积分——閉路电动势和它的边界的关系——則得到 (-7.2)。假定向量势位是 \mathbf{A} , 那末由 $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ 和 Stokes 定理, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{C^1} d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \iint_{C^1} d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial C^1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\partial C^1) = -\dot{\Phi}(\partial C^1). \end{aligned}$$

这里沿边界 ∂C^1 的閉路积分

$$\Phi(\partial C^1) = \oint_{\partial C^1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \iint_{C^1} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

士① \mathbf{i} 表示电流密度向量, \mathbf{E} 表示电場强度, \mathbf{B} 表示磁通密度向量。

在电工学中称为这閉路的**互联磁通**。

§ 8 桁架的結構力学

考虑电工学以外的例子,我們来看桁架的平衡条件。

桁架是由彈性直綫元素杆件在节点用釘子联結起来所构成的网络。在各节点 σ_i^0 , 外力(向节点的方向作为正方向) g^i 給各元素 σ_x^1 以推力 t^x (以压縮为正)。它的应力是向量, 所以有三个分量, 但是它的方向和各杆件的方向一致, 所以它的自由度仍然是 1, 如命

$$C^0 = g^i \sigma_i^0, \quad c^1 = t^x \sigma_x^1,$$

那末应力和外力的平衡条件可以写成和 1-Kh 定律相当的形式

$$C^0 = \partial C^1, \quad g^i = D^i_x t^x. \quad (8.1)$$

这表示 C^0 是边界 ($C^0 \simeq 0$), 从而

$$\partial C^0 = 0. \quad (8.2)$$

(8.2) 就是作用在靜止的桁架上的外力的平衡条件。

如果用关于任意点的力矩 $r^i \times g^i$ (r^i 是从这一点到节点 σ_i^0 的向徑, \times 是 Gibbs 的向量积記号) 代替 g^i 当系数来考虑 0 維鏈

$$C''^0 = \sum_i r^i \times g^i \sigma_i^0,$$

那末力矩的平衡条件可以写做

$$\partial C''^0 = 0. \quad (8.3)$$

結果 C''^0 是 0 維圈。但是如同 (8.2) 和 (8.3) 那样, 当談到 0 維鏈的边界的时候我們考虑的是 -1 維的, 所以沒有不是边界的 0 維圈。因此 C''^0 决定了一个滿足

$$C''^0 = \partial C'^1$$

的 1 維鏈 C'^1 。

表面上, 可以把那些用三个直綫元素当边的三角形定义为 2

維单形,把用四个直线元素当棱的四面体定义为3維单形,可是力学量和分量的关系却不能仅仅从組合拓扑学考察。这里不得不进一步考虑直线元素相互間的仿射几何学的关系和 Euclid 几何学的关系。在这意义下,在结构力学中是不能那么痛快地用 Kirchhoff 定律的两两对偶的形式来对比同調和反同調的。勉强做形式上的模仿,我們把鏈 C^0, C^1 在直线坐标下分解成三个分量分別考虑,然后把力学和 Euclid 几何学的条件对比如下。

表 8.1 里 $0\text{-Tr}(0\text{-Kh})$ 等是相当于 Kirchhoff 定律的桁架条件, l_k 和 S_k 各是表示枝元素 σ_1^k (1維反单形) 和面元素 σ_2^k (2維反单形) 的 Euclid 向量,长度各等于枝的长度和三角形的面积,方向各取枝的方向和面的法线的方向。

表 8.1

静力学	Euclid 几何学
$0\text{-Tr}(0\text{-Kh}):$ $p=0, C^0=g^i\sigma_i^0$ $\partial C^0=0; d^a_i g^i=0$ $(C^0 \simeq 0)$	$3\text{-Tr}(3\text{-Kh}):$ $p=2, C_2=S_k\sigma_k^2$ $\delta C_2=0; r_{\delta}^k S_k=0$
$1\text{-Tr}(1\text{-Kh}):$ $p=1, C^1=t^{\alpha}\sigma_{\alpha}^1$ $\partial C^1=C^0; D^i_{\alpha} t^{\alpha}=g^i$	$2\text{-Tr}(2\text{-Kh}):$ $p=1, C_1=l_{\lambda}\sigma_{\lambda}^1$ $\delta C_1=0; R_{\lambda}^{\lambda} l_{\lambda}=0$

这里值得注意的是,在对偶对应中一边是几何学的图形,另外一边是鏈。根据这样的看法来設計巧妙的应用有 L. Oremona 提議的單純平面桁架的实用图解应力分析法^{[110],[111]~116}。所謂單純的桁架是这样的:至少存在一个只联接两个杆件的节点,并且按适当的順序每从一个节点移动到别的节点的时候,新出現的杆件只有两个。在这情况下杆件应力全部可以由作图决定。图 ±8.1 是它的例子,对原来的平面桁架的外力所成的 2 維图形 (图 +8.1) 来

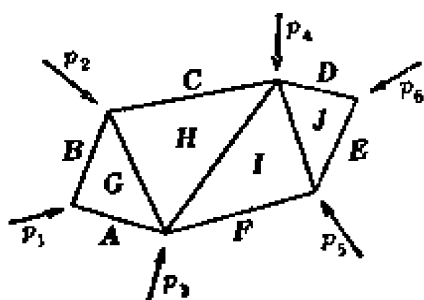


图 +8.1

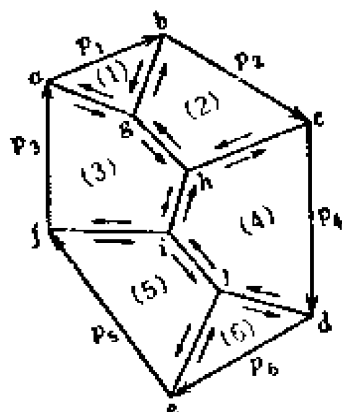


图 -8.1

說, (外力和应力) 应力所成的閉力綫图(图-8.1)正好是射影几何学的对偶变换^①。这样的力綫图平面叫做 Cremona 应力平面。

对不單純的桁架不一定可以用这作图法, 不过在靜定^②的情况下, 可以从一組个数等于节点数或比节点数少三的联立一次方程中解出所有的杆件应力(和反作用力)。

§9 剩 余 度

一般, 在靜止桁架的平衡問題中, 当外力 g^i 指定以后, 应力 t^* 不一定就完全决定。这是因为如果

$$t^* = t^*, \quad C_1^1 = t^* \sigma_x^1 \quad (9.1)$$

是(8.1)的方程 $C^0 = \partial C^1$ 的解, 那末加上一个满足齐次平衡方程

$$\partial C_0^0 = 0, \quad D_1^1 t^* = 0, \quad C_0^0 = t_1^* \sigma_x^0 \quad (9.2)$$

的任意的 C_0^1 以后所得的

$$C^1 = \Gamma^1 \equiv C_0^1 + C_1^1, \quad t^* = t^* + t^*$$

也滿足同样的非齐次平衡方程。結果可能产生相差一个 1 維圈的那樣一种物理不定性。

① 参看 § 21。

② 参看下一节。

所給的条件是作为在各节点的分量的平衡条件的

(i) $3\alpha^0$ 个独立的方程,

还有作为桁架整体所受的外力和它的力矩的平衡条件的

(ii) $3R^0$ 个外力方程, 和

(iii) $3R^0$ 个力矩方程。

由于(ii)和(iii), (i)的自由度减小了。因此每杆件各有一个而总共有 α^1 个的未知数 t^x 里只有

$$N = \alpha^1 - 3\alpha^0 + 6R^0 \quad (\text{通常 } R^0 = 1) \quad (+9.3)$$

个是不定的。这是 3 維桁架的所謂不靜定度。对平面桁架,

$$N = \alpha^1 - 2\alpha^0 + 3R^0 \quad (\text{通常 } R^0 = 1) \text{. ①} \quad (+9.4)$$

在电网络情况中也有同样的不定性。这情况中所有的施加和响应量都是标量, 所以相当于把力矩平衡条件除外的 1 維桁架的不靜定度公式——(+9.3), (+9.4) 的推广——

$$R^1 = \alpha^1 - \alpha^0 + R^0$$

剛好成立。这正好是第 1 个 Betti 数。所以桁架的不靜定度是第 1 个 Betti 数的推广②。

如果电网络的不定性从电流分布 (1-Kh) 和电压分布 (2-Kh) 两方面来看, 把 (± 7.2) —— $\partial C^1 = C^0$ 和 $\partial C_1 = C_2$ —— 的非齐次解記做

$\dot{v}^x = s^x,$ <p>那末加上齐次 1-Kh</p> $D_{i,x}^t I^x = 0 \quad (+9.5)$ <p>的任意解 I^x 后所得的</p> $\dot{v}^x = s^x + I^x \quad (+9.6)$	$u_\lambda = e_\lambda,$ <p>那末加上齐次 2-Kh</p> $R_{i,\lambda}^t U_\lambda = 0 \quad (-9.5)$ <p>的任意解 U_λ 后所得的</p> $u_\lambda = e_\lambda + U_\lambda \quad (-9.3)$
---	---

① 这样的剩余度如果是負的話, 就变成不定的桁架了。

② 如果考虑壳的应力場的不定性, 那末可以得到第 2 个 Betti 数的推广。把电网络看做面的集合 (2 維复形) 的一般討論中, 也隱含着跟这有关的問題。

也是非齐次 Kirchhoff 方程的解。并且这样的 I^* 和 U_λ 是由任意的 J^p, V_b 组成的组合

$$I^* = R_{\cdot p}^* J^p, \quad (+9.7) \quad | \quad U_\lambda = D_{\lambda b}^* V_b, \quad (-9.7)$$

最后, 电流分布和电压分布各只在等于独立闭路数 $k = \alpha^2 - R^2$ (或 R^1) 和独立点数 $m = \alpha^0 - R^0$ 的自由度下不定。我们把 J^p 和 I^* 分别叫做**闭路电流**和**涡旋部分电流**, 分别把 V_b 和 U_λ 叫做**节点电位**和**星形枝电压降**。

第3章 树和反树

§ 10 定 义^{[12],[13]}

这一章是当作第一章的补充的。因此系数都取做整数。在一般的拓扑学术語中,“树”是1維的无圈上复形,是 p 維的无圈复形的特殊情况。同样,“反树”是1維无反圈的下复形,是 p 維无反圈复形的特殊情况。

采取 § 4 最后的观点来把网络扩充到上至3維下至-1維的那种做法,事实上就是把0, 1, 2維的圈统统变为边界,因此

$$R^0 = R_0 = R^1 = R_1 = R^2 = R_2 = 0,$$

还有 $R^{-1} = R_{-1} = 0$ (最低維的反鏈中沒有反圈), $R^3 = R_3 = 0$ (最高維的鏈中沒有圈)都是明显的。也沒有它的繞率和反繞率。因此不用考虑同調群和反同調群,单考虑边界群和反边界群就行了,正准基底是由

边界 a^p	非圈的鏈 e^p	$\partial a^p = 0, \quad \partial e^{p+1} = a^p$
e_p	a_p	$\delta e_p = 0, \quad \delta a_{p-1} = e_p$
反边界	非反圈的反鏈	

构成的。

$V_p^I = \{e_i^p\}$ 和第 $p-1$ 个边界群 $F_{p-1}^{I-1} = \{a_i^{p-1}\}$ 間的同构关系(+3.3) $V_p^I \cong F_{p-1}^{I-1}, \omega_p = \rho^{p-1}$ 和相当于简化了的方程(+3.5) $\alpha^p = \rho^p + \rho^{p-1} \quad (+10.1)$	$V_p^J = \{a_i^p\}$ 和第 $p+1$ 个反边界群 $F_{p+1}^J = \{e_i^{p+1}\}$ 間的同构关系(-3.3) $V_p^J \cong F_{p+1}^J, \omega_p = \rho_{p+1}$ 和相当于简化了的方程(-3.5) $\alpha_p = \rho_p + \rho_{p+1} \quad (-10.1)$
---	--

决定了一切。特别 $\alpha^0 = \rho^0 + \rho^{-1}$ 成立, 因此 $(\alpha^{-1} =) \rho^{-1} = \alpha^0 - \rho^0$ 是 (相当于 § 3 的 R^0) 独立接續的个数。

特别可以取出个数等于 0 維独立圈 $\{a_i^0\}$ 的数目 ρ^0 那么多的 ω^1 个 (e_i^1 的个数) 独立的枝来构成 V_1^1 的基底。这样的枝組叫做(完全)树, 再添上一枝就不成树了。

特别, 独立 2 維反圈 (e_i^2) 的数目恰好是 ρ_2 ①, 取出个数与 ρ_2 相等的 ω_1 个独立枝来可以构成 V_1^2 的基底。这样的枝組叫做(完全)反树, 再添上一枝就不成反树了。

现在来証明去掉树以后剩下的是反树, 去掉反树以后剩下的是树。

由 (±10.1) 中无论那一个可以得到 $\rho_2 = \rho^1$ 或者 $\rho_1 = \rho^0$, 因此

$$\alpha^1 = \alpha_1 = \rho_2 + \rho^0,$$

也就是枝的总数等于独立 0 維圈数 (= 树的枝数) ρ^0 与独立 1 維圈数 (= 反树的枝数) ρ_2 的和。显然前者生成 V_1^1 , 后者生成 V_1^2 , 它們全体和 C_1^1 也和 C_1^2 同构:

$$C_1^1 = V_1^1 + Z_1^1 \cong V_1^1 + V_1^2 \cong Z_1^1 + V_1^2 = C_1^2, \quad (10.2)$$

于是証明了所說的相补关系⁽¹⁴⁾。

§ 11 独立节点和原始閉路

把反树的枝——拿出来添到树上, 每次可得到一个包含一条閉路的图形。这样一来一共可以有 $k (= \rho_2)$ 条閉路, 它們都是独立閉路, 叫做**原始閉路**。所謂反树其实就是把原始閉路的間隙縫合起来的枝的組合。对应地如果把各独立节点称为原始星形, 那末树正好就是把原始星形联接起来的枝的組合。

树是把独立节点的机能 (接續矩陣 $D_{n,n}^0$ 中独立的行) 轉移到枝上去的工具, 反树是把 (特别是独立的) 原始閉路的机能 (閉路矩陣

① 一般 $\rho_2 + E_2$ 。

R_q^i 中独立的列)轉移到枝上去的工具。因此它們在根据枝的物理特性来建立理論时是有用的概念。特別在电工学中,通常假定枝的本身和相互結合都已知,所以利用树和反树的概念来建立公式是方便的。

同构的整系数加群的基底(即取做基底的独立元素)之間的变换是单模变换(行列式的絕對值是 1)。因此逆变换存在,并且变换和逆变换方陣的元素都是整数,从而它們的行列式也必須为整数。可是又必一定互成倒数,所以只能是 +1 或 -1。

任意树的枝,即 V_f 的基底和 Z_f^i 的基底(独立星形,从而节点的組合)之間的变换是单模的非奇异变换。使非树和 m 个独立节点同构是做不到的,所以它和 Z_f^i 基底之間的变换是奇异的。因此:

假定独立节点是 $1, 2, \dots, m$, 那末按 $x_1 \cdots x_m$ 是不是树,

$$D = m! D_{\{x_1 \cdots x_m\}} = \pm 1 \text{ 或者 } 0. \quad (+11.1)$$

这里 D 是 $D_{x_i}^x$ 的 m 阶子行列式, $D_{x_1 \cdots x_m}$ 的定义是

$$\begin{aligned} D_{x_1 \cdots x_m}^1 D_{x_2 \cdots x_m}^2 \cdots D_{x_m \cdots x_m}^m \\ \stackrel{d}{=} D_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{1 \ 2 \ \cdots m} \textcircled{1} \\ \stackrel{d}{=} D_{x_1 x_2 \cdots x_m}. \end{aligned} \quad (+11.2)$$

任意反树的枝,即 V_f^i 的基底和原始閉路之間,从而和 Z_f^i 的任意的基底之間的变换是单模的非奇异变换。非反树不能形成 k 个独立閉路,所以和 Z_f^i 的基底之間的变换是奇异的。因此:

假定原始閉路是 $m+1, m+2, \dots, m+k (=n)$, 那末按 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ 是不是反树,

$$R = k! R^{\{\lambda_1 \cdots \lambda_k\}} = \pm 1 \text{ 或 } 0. \quad (-11.1)$$

这里 R 是 $R_q^{\lambda_i}$ 的 k 阶子行列式, $R^{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$ 的定义是

$$\begin{aligned} R_{m+1}^{\lambda_1} R_{m+2}^{\lambda_2} \cdots R_{m+k}^{\lambda_k} \\ \stackrel{d}{=} R_{m+1 \ m+2 \ \cdots \ m+k}^{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_k} \\ \stackrel{d}{=} R^{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k}. \end{aligned} \quad (-11.2)$$

① “d” 表示“定义做”。下同。——譯者注

对于树, D 叫作**树子行列式**, 对于非树, D 叫**非树子行列式**。

这些子行列式与把不在某 m 个列中的那些枝除去以后所成的接續的接續方陣的行列式一致。在这操作下, 拆散了非树中接續, 增加了独立接續, 非树子行列式变成 0。

把树(反树)子行列式按适当的行进行 Laplace 展开, 可以証明它等于 ± 1 。这种适当的行(列)例如可以决定如下。

因为树行列式只是从 $D_{n,n}^1$ 里去掉 α^{-1} (§3 的 R^0) 行, 所以去掉节点的反边界成为剩下节点的反边界, 各枝按其所联接的节点来看, 除了一个有联接数 $+1$ 或 -1 以外其余的联接数都是 0。因此按这个节点的行进行 Laplace 展开, 得到 $\pm 1 \times$ (它的余因子)。又对这个余因子也有同样情况, 所以重复 $m-1$ 次以后結果成为 ± 1 。

在上面的証明中, 所用的是那些本身是原始閉路的特殊的 1 維圈群基底或 1 維反圈群基底, 不过由于同一个整加群的基底变换行列式的绝对值总是 1, 結論并不依赖于特殊的基底和特殊的树(反树)。至于正負符号的問題, 将在下一节討論。

§ 12 树和反树行列式的相对符号

(± 11.1) 和 (± 11.2) 对任何树和反树都成立。不但这样, 无论基底 $1, \dots, m$ ($m+1, \dots, n$) 怎样, 它們是不变的, D 和 R 的相对符号也固定不变, 这事实証明如下^{[15],[16],[17]}。

假定整 1 維圈群 Z_2^1 的基底变换 $\zeta_q \rightarrow \zeta_{q'}$ 是

$$\zeta_q = A_q^{q'} \zeta_{q'}, R_q^\lambda = A_q^{q'} R_{q'}^\lambda$$

$$(q = m+1, \dots, n, \quad q' = m'+1', \dots, n'),$$

那末显然

$$R_{[\mathbf{m}'+1', \dots, \mathbf{n}']}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k} = A_{[\mathbf{m}'+1', \dots, \mathbf{n}']}^{q_1, \dots, q_k} R_{q_1, \dots, q_k}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k} = \det(A_{q'}^q) R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k},$$

这里

$$A_{\mathbf{m}'+1', \dots, \mathbf{n}'}^{q_1, \dots, q_k} = A_{\mathbf{m}'+1'}^{q_1} A_{\mathbf{m}'+2'}^{q_2} \cdots A_{\mathbf{n}'}^{q_k}.$$

因此得到

$$R_{[\mathbf{m}'+1', \dots, \mathbf{n}']}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k} / R_{[\mathbf{m}'+1', \dots, \mathbf{n}']}^{\lambda'_1, \dots, \lambda'_k} = R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k} / R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda'_1, \dots, \lambda'_k}.$$

但是假定 $(\zeta_{\mathbf{m}+1}, \dots, \zeta_{\mathbf{n}})$ 是由附属于反树 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ 的原始闭路形成的 Z_J^1 的基底, 那末

$$R_q^{\lambda_k} = \begin{cases} 1, & q = \mathbf{m} + \mathbf{i}, \\ 0, & q \neq \mathbf{m} + \mathbf{i}, \end{cases}$$

所以由 (-11.1) 和 (-11.2) 得到

$$k! R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k} = k! R^{[\lambda_1, \dots, \lambda_k]} \approx 1 \textcircled{1},$$

因此

$$R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k} / R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda'_1, \dots, \lambda'_k} \approx k! R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k}.$$

特别当 $\lambda_i = \lambda'_i (i=1, 2, \dots, k-1)$, $\lambda_k \neq \lambda'_k$ 时, 这个比值成为

$$k! R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k} = k! R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k} = R_{\mathbf{n}}^{\lambda_k}.$$

也就是

(i) “如果在构成反树 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ 的补足的那个树上添上枝 λ_k , 并且在由此得到的闭路 $\zeta_{\mathbf{n}}$ 上按正(负)方向配置 λ'_k , 那末 $R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda_1, \dots, \lambda_k}$ 跟 $R_{[\mathbf{m}+1, \dots, \mathbf{n}]}^{\lambda'_1, \dots, \lambda'_k}$ 的相对符号是 $+(-)$ ”。或者说, “如果在双方的反树中把共同的枝 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ 各各开放(即除去), 并且使对所产生的闭路, λ_k 和 λ'_k 有相同(相反)联接方式, 那末这符号是 $+(-)$ ”。

关于 $D_{x_1, \dots, x_m}^{[1, \dots, m]}$ 的相对符号, 和上面完全对偶的考察也成立。也就是

(i') “如果在构成树 $x_1 \cdots x_m$ 的补足的那个反树上添上枝 x_m , 对所得到的星形 ζ^m 按正(负)方向配置 x'_m , 那末 $D_{x_1, \dots, x_m}^{[1, \dots, m]}$ 和 $D_{x'_1, \dots, x'_m}^{[1, \dots, m]}$ 的相对符号是 $+(-)$ ”。或者说 “如果在双方的树上各把共同的枝

① “ \approx ”表示只在所考虑的特殊基底选择下相等的意思, 下同。——译者注

x_1, x_2, \dots, x_{m-1} 縮短(即看做一点), 并且使对所形成的接續点, x_m 和 x'_m 有相同(相反)的联接方式, 那末这相对符号是 $+$ ($-$)”。

就图 +12.1 的例子来说,

如果把树 123 和 124 的共同枝 1, 2 縮短, 那末就成为图 +12.2. 枝 3 和 4 都以正向联接于节点 (1, 2)①, 所以

$$3|D_{[123]}/3|D_{[124]}=1.$$

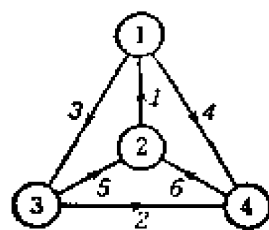


图 +12.1

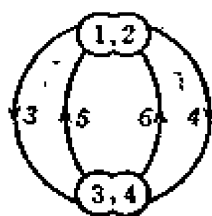


图 +12.2



图 -12.1

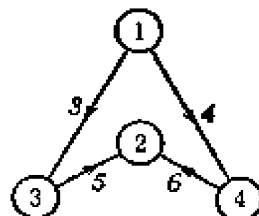


图 -12.2

另一方面, 由行列式的性质知道

(ii) “仅仅是枝的顺序不同的(反树)行列式的相对符号随置换的偶奇而分别是 $+$ 或 $-$ ”。

把 (i) 和 (ii) 这两个定理结合起来就可以从图形上看出任意的树(反树)行列式的相对符号。

例如在图 +12.1 的情形,

$$D_{[123]}^x = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

所以

例如把图 12.1 的閉路取做图 -12.1 的样子, 那末

$$R_{[123]}^x = \begin{pmatrix} \cdot & -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

① 因为都从点 (1, 2) 出发。见 §5 里关于 $D_{[123]}^x$ 的正负号的说明。——译者注

$$\begin{aligned}
3!D_{\{123\}} &= \begin{bmatrix} -1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1, & 3!R^{\{123\}} &= \begin{bmatrix} \cdot & -1 & -1 \\ 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1, \\
3!D_{\{124\}} &= \begin{bmatrix} -1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} = 1, & 3!R^{\{124\}} &= \begin{bmatrix} \cdot & -1 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \end{bmatrix} = 1,
\end{aligned}$$

相对符号的确和前页的结果一致。又

$$3!D_{\{234\}} = \begin{bmatrix} \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot \end{bmatrix} = 0 \quad \left| \quad 3!R^{\{156\}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} = 0 \right.$$

是非树[非反树]的例子。相对置换的例子不用举了。

§ 13 部分复形和相对拓扑, 部分树和部分反树^[18]

把网络分成两个互相补足的部分来考虑比较方便。于是由网络扩大而成的 2 维或 3 维复形 K 也可以分成两部分 K_0 和 K_1 —— $K = K_0 \cup K_1$ ——, 最好是把 K_1 取做闭集合, 即满足

$$ClK_1 = K_1,$$

从而 K_0 取做开集合, 即满足

$$StK_0 = K_0.$$

这里 ClX 是子集 $X (\subset K)$ 与依次作为边界面和它相联的所有低维胞——即 X 的侧面——的和集, 称为 X 的包, StY 是子集 Y 与依次作为反边界面和它相联的所有高维——即以 Y 为侧面的——胞的和集。

在部分上下复形 K_1 和 K_0 上可以定义相对拓扑如下。

首先, 任何一个链(反链) O 都可以分为两个部分 $O_0 (\subset K_0)$ 和 $O_1 (\subset K_1)$ 。

① 原文第一行第三列元素误为 -1 , ——译者注

$$C = C_0 + C_1 \quad (C \subset K_0, C \subset K_1).$$

在各部分 K_1 和 K_0 分别可以考虑如下的**相对边界**和**相对反边界**运算:

$$\partial_1 C_p \triangleq \partial C_p \cap K_1 = \partial_1 C_p, \quad \partial_0 C_p \triangleq \partial C_p \cap K_0 \neq \partial_0 C_p,$$

$$\delta_1 C_p \triangleq \delta C_p \cap K_1 \neq \delta_1 C_p, \quad \delta_0 C_p \triangleq \delta C_p \cap K_0 = \delta_0 C_p,$$

并且可以相应地定义**相对同调**和**相对反同调**。进行如下。

(i) 闭集合 K_1 的链 C_1 在 K_1 里有边界, K_0 的圈和边界在 K 里也是圈和边界。但是 K_0 的圈也可能是边界在 K_1 上的 K 的链。

(ii) 开集合 K_0 的反链 C_0 在 K_0 里有反边界, K_0 的反圈和反边界在 K 里也是反圈和反边界。但是 K_1 的反圈也可能是反边界在 K_0 上的 K 的反链。

象 § 4 那样扩大到 2 维 (3 维) 网络中, 至少 1 维 ($1 \sim 2 = n-1$) 的部分是无圈并且无反圈的。因此 1 维 (1~2 维) 同调群和反同调群是空的。在这情况下, 可以

在 K_1 上 根据由 ∂ 所定义的同调来定义树和反树,

根据由 δ_1 所定义的反同调来定义树和反树, 又

在 K_0 上 根据由 δ 所定义的反同调来定义树和反树,

根据由 ∂_0 所定义的同调来定义树和反树,

在这些相对同调和反同调的定义下的**相对树**和**相对反树**彼此等价 (参照 § 10 的树和反树的等价性)。

此外, 如果 K_1 是联接的, 那末“ K_0 上的一个树和 K_1 上的一个树的结合一定是 K 上的树”, “ K_0 上的一个反树和 K_1 上的一个反树的结合一定是 K 上的一个反树”。因此, K_0 的树虽然是 K 的树的一部分即部分树, 但是假定 K_1 的独立节点的数目是 $\alpha-1$, 则在 K_0 的树上添上 K_1 的点以后, 成为可以分成 α 个分离

部分的东西。不过各部分也可能只包含一点。我們把它叫做**森或多树**, 有时特别叫做 α 树。

同样, K_1 的反树是 K 的反树的一部分, 不过 K_0 的独立閉路的数目如果是 $\beta-1$, 那末把它叫做 β 反树, 一般就称为**多反树或反森**。

特别, 2 树和 2 反树各称为**双树(或林)或双反树(或反林)**。

凡是有特殊的节点, 例如 a, ac 等, 指定属于一个部分树, 又有 bc, bd 等指定属于另一个部分树的那些双树的全体記做

$$(tt): t_{a, bc}, t_{ac, bd} \text{ 等等};$$

对偶情况是有特殊閉路指定属于部分反树的那些双反树的全体^①, 記做

$$(\bar{t}\bar{t}): \bar{t}_{p, qr}, \bar{t}_{pr, qs} \text{ 等等}.$$

又从所有的枝中除去 (tt) 那样的双树与联接 a 和 b , a 和 c 的枝或联接 a 和 b , c 和 d 的枝以后剩余的全体記做

$$(\bar{t}t): \bar{t}^{a, bc} \text{ 或 } \bar{t}^{ac, bd};$$

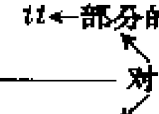
对偶的情况是从所有的枝中去掉 $(\bar{t}\bar{t})$ 那样的双反树和联接閉路对 $(p, q), (p, r)$ 或 $(p, q), (r, s)$ 的枝以后剩余的全体, 記做

$$(t\bar{t}): t_{p, qr} \text{ 或 } t_{pr, qs}.$$

这些对偶关系可以列成表 13.1, 但关于双树的定理和关于双反树的定理并不一一对偶地写下。例如, 表 13.1 的下段根据閉路指定所做的定义对非平面网络沒有意义, 又 $\bar{t}^{a, b}(t_{p, q})$ 那样的有指定节点(閉路)的双反树(双树)是不可能定义的, ……等等。

表 13.1

双树和双反树的对偶对应

	配 号	
	双 树	双反树
节点指定	$tt \leftarrow \text{部分的对偶} \rightarrow \bar{t}\bar{t}$ 	
閉路指定	$t\bar{t} \leftarrow \text{部分的对偶} \rightarrow \bar{t}t$	

① 这种根据閉路指定所做的定义, 只对平面网络(和球面同胚的东西)有意义。

第4章 网络的拓扑分析^①

§14 因果关系

一直到这里，我們尚未考虑同調的网络量和反同調的网络量之間的數量关系，只是对比了它們之間的对偶关系。可是在物理或工程的网络問題上，它們之間还有数量的关系。其中許多是一对一的，而且通常是綫性的。例如在电网络上，电流和电压降之間存在因果关系

$$i^* = y^{\lambda\lambda} u_\lambda, \quad (+14.1) \quad | \quad u_\lambda = z_{\lambda\lambda} i^*, \quad (-14.1)$$

称为 **Ohm 定律**。 $y^{\lambda\lambda}$ 和 $z_{\lambda\lambda}$ 是网络所特有的，前者叫**导納**，后者叫**阻抗**。不限于一定是实数或复数。也不限制关于 λ 和 λ 是对称的。不过总是

$$y^{\lambda\lambda} z_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \quad (+14.2) \textcircled{2} \quad | \quad z_{\lambda\mu} y^{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \quad (-14.2) \textcircled{2}$$

即 $(y^{\lambda\lambda})$ 和 $(z_{\lambda\lambda})$ 互成逆方陣。

已知原因量(在电网络上电压源和电流源，在桁架或框架上是外力和力矩等)时求响应量，这过程称为解这个网络。要解网络只要把因果关系当作方程来解就行了，不过怎样先把这种关系的表达方式整理得最适当，以便使基本数值可以机械地組織在一起，則有許多讲究。

例如电网络的因果律的表示方式主要是

(i) 把枝看作基本的東西，列出它們之間的 Ohm 定律：
(± 14.1)。

(ii) 把节点(星形)和閉路(面)看作基本的東西，把一切因果

① 一般事項参考 [6], [13], [19]。

② δ_λ^μ 是 Kronecker 的 δ 。因此 (δ_λ^μ) 是单位方陣。

律都化成它們之間的关系：

假定 s^a 是节点电流源, V_b 是节点电位, 那末有

$$(a) \quad s^a = y^{ab} V_b,$$

$$(b) \quad V_b = z_{ba} s^a$$

假定 e_q 是閉路电压源, J^p 是閉路电流, 那末有

$$(a) \quad e_q = z_{qp} J^p,$$

$$(b) \quad J^p = y^{pq} e_q$$

这样两种表示方式。不用說, (i) 的关键在于抓住树和反树, (ii) 的关键在于抓住同調和反同調。此外, 第 5 章內所說的

(iii) 通过把閉路变成等价星形, 把星形变成等价閉路的这些对偶变换, 使复杂的网络全部或者一部分化成便于分析的等价网络的方法也是 (ii) 所牵涉到的問題。

电网络分析中主要是把 (i) 变到 (ii) 的两个步骤:

$$(a) \quad \text{已知 } y^{xx} \text{ 求 } y^{ab},$$

$$(b) \quad \text{已知 } y^{xx} \text{ 求 } z_{ba},$$

$$(a) \quad \text{已知 } z_{xx} \text{ 求 } z_{qp},$$

$$(b) \quad \text{已知 } z_{xx} \text{ 求 } y^{pq}.$$

第一个步骤 (a) 是导納变导納, 阻抗变阻抗的变换, 不过是因果关系的变形罢了, 并不是把响应量用原因量表示出来, 严格地讲, 这不算是解网络。再进一步计算 $y^{ab}(z_{qp})$ 的逆方阵就成为 (b) 的形式。在快速计算机已很发达的今天, 在枝的特性都用各种数值表示的情况下, 后一步骤可以交给机器去完成, 因此有人认为分析就可到此为止。但是如果象 § 16 那样要把 (b) 的各阶段一般地处理完毕, 那末最好还是把 (a) 称为**中間阶段**, 把 (b) 称为**直接(即真的分析)阶段**来加以区别。不过后者主要是根据网络的具体情况来組織逆方阵的计算工作, 建立机械的代入运算公式, 此外就没有別的了。

§ 15 中間分析阶段

現在用节点电流源和它的对偶閉路电压源网络來說明^①。

① 对各种原因量和响应量之間的关系都可以同样考虑, 可是現在限于本題, 只考虑(±15.7)內的 $e_\lambda = 0$, $s^x = 0$ 的情况。

(ii) 的 Ohm 定律(a)是

$$D_{\lambda x}^a y^{\lambda x} D_{\lambda}^b V_b = s^a \quad (+15.1)$$

如果还有枝电压源 e_λ , 则右边改成

$$s^a - D_{\lambda x}^a y^{\lambda x} e_\lambda$$

就行了。

(a) 或者 (± 15.1) 左边的

$$y^{ab} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\lambda x}^a y^{\lambda x} D_{\lambda}^b$$

叫节点导纳, 是这样一些 $y^{\lambda x}$ 的代数和, 它们的前一个指标所代表的枝的全体构成节点 a 的反边界, 后一个指标所代表的枝的全体构成节点 b 的反边界。

各项的符号各依“点”对“枝”, “面”对“枝”的联接符号的同或异而分正或负(注意节点电流源当流入这一节点时算作正)。为了研究机械地进行这种操作的技巧, 我们举例如下。

先把图 ± 12.1 内各个节点的星形和面的闭路表示成图 ± 15.1 那样的关系点的顺序^[20]:

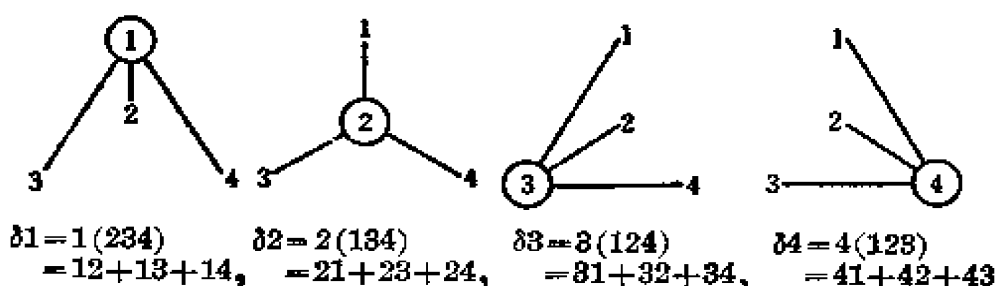


图 ± 15.1

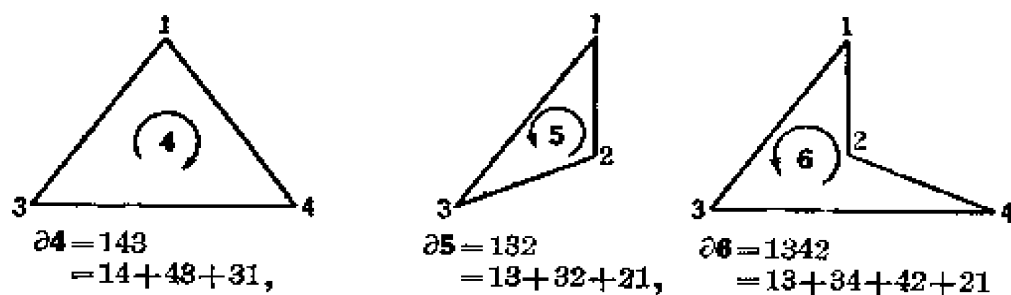


图 -15.1

$$R_q^{\lambda} z_{\lambda x} R_p^x J^p = e_q. \quad (-15.1)$$

如果还有枝电流源 s^x , 则右边改成

$$e_q - R_q^{\lambda} z_{\lambda x} s^x$$

就行了。

$$z_{qp} \stackrel{\text{def}}{=} R_q^{\lambda} z_{\lambda x} R_p^x$$

叫闭路阻抗, 是这样一些 $z_{\lambda x}$ 的代数和, 它们的前一个指标所代表的枝的全体构成面(闭路) q 的边界, 后一个指标所代表的枝的全体构成面(闭路) p 的边界。

第二行把各星形或閉路表示成它們所含的枝的和。如果命

$$y^{ab} \stackrel{\text{def}}{=} y_{bc}^{ab}, \quad (+15.2) \quad \cdot \quad z_{qp} \stackrel{\text{def}}{=} z_{pq}^{qp}, \quad (-15.2)$$

那末,例如

$$\begin{array}{l|l} y^{11} = y_{31}^{31} = y_{1(234)}^{1(234)} = y_{12+13+14}^{12+13+14}, & z_{44} = z_{24}^{24} - z_{143}^{143} = z_{1+43+31}^{14+43+31}, \\ y^{21} = y_{31}^{32} = y_{1(234)}^{2(134)} = y_{12+13+14}^{21+23+24}, & z_{54} = z_{24}^{25} - z_{143}^{132} = z_{1+43+31}^{13+32+21}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \quad \begin{array}{l} (+15.3) \\ (-15.3) \end{array}$$

这些关系显然成立。依上下指标中各項的一切可能的結合写出来,可得

$$\begin{array}{l|l} y^{11} = y_{12}^{12} + y_{13}^{13} + y_{14}^{14} & z_{44} = z_{14}^{14} + z_{14}^{43} + z_{14}^{31} \\ \quad + y_{13}^{12} + y_{13}^{13} + y_{13}^{14} & \quad + z_{43}^{14} + z_{43}^{43} + z_{43}^{31} \\ \quad + y_{14}^{12} + y_{14}^{13} + y_{14}^{14}, & \quad + z_{31}^{14} + z_{31}^{43} + z_{31}^{31}, \\ y^{21} = y_{12}^{21} + y_{12}^{23} + y_{12}^{24} & z_{54} = z_{14}^{13} + z_{14}^{32} + z_{14}^{21} \\ \quad + y_{13}^{21} + y_{13}^{23} + y_{13}^{24} & \quad + z_{43}^{13} + z_{43}^{32} + z_{43}^{21} \\ \quad + y_{14}^{21} + y_{14}^{23} + y_{14}^{24}, & \quad + z_{31}^{13} + z_{31}^{32} + z_{31}^{21}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \quad \begin{array}{l} (+15.4) \\ (-15.4) \end{array}$$

这里如果規定当各項的指标对与所設的枝的方向相同(反)时帶“+”号,相反时帶“-”号,那末也可以改用 $y^{x\lambda}$, $z_{\lambda\mu}$ 表示。也就是說,依照图 +12.1 的各枝的方向写成

$$\begin{array}{l|l} y^{11} = y^{11} - y^{31} - y^{41} & z_{44} = z_{44} - z_{24} - z_{34} \\ \quad - y^{13} + y^{33} + y^{43} & \quad - z_{42} + z_{22} + z_{32} \\ \quad - y^{14} + y^{34} + y^{44}, & \quad - z_{43} + z_{23} + z_{33}, \\ y^{21} = -y^{11} + y^{51} + y^{61} & z_{54} = z_{34} + z_{54} + z_{14} \\ \quad + y^{13} - y^{53} - y^{63} & \quad - z_{32} - z_{52} - z_{12} \\ \quad + y^{14} - y^{54} - y^{64}, & \quad - z_{33} - z_{53} - z_{13}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \quad \begin{array}{l} (+15.5) \\ (-15.5) \end{array}$$

等等。不过要把不存在的東西从(±15.4)中去掉。

特别当没有相互结合时 (y^{xx} 仅由本身枝导纳 $y \stackrel{x}{=} y^{xx}$ 组成, $z_{\lambda\lambda}$ 仅由本身枝阻抗 $z \stackrel{\lambda}{=} z_{\lambda\lambda}$ 组成),

“ y^{aa} 是 δa 里的 y 的和, y^{ab} ($a \neq b$) 是 $\delta a \cap \delta b$ 里的 y 的和的负值”。

“ z_{qq} 是 ∂q 里的 z 的和, z_{qp} ($q \neq p$) 是 $\partial q \cap \partial p$ 里的 z 的代数和”。

这里的符号依上面的法则决定。也可以依各枝和节点或闭路的联接方向的同或异而取 + 或 - 号⁽⁶⁾。

$$y^{ab} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 4 \\ y + y + y \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -y \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ -y \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ -y \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 6 \\ y + y + y \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ -y \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 3 \\ -y \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ -y \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 5 \\ y + y + y \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad z_{qp} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 2+3+4 \\ z \quad z \quad z \end{array} & \begin{array}{c} -z \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} -z-z \\ 2 \quad 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -z \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} z+z+z \\ 1 \quad 3 \quad 5 \end{array} & \begin{array}{c} z+z \\ 1 \quad 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -z-z \\ 2 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} z+z \\ 1 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} z+z+z+z \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \end{array} \\ \hline \end{array} \right.$$

彼此对应于反边界(边界)

$$\begin{array}{l|l} \delta 1 = 1 + 3 + 4, & \partial 4 = 2 + 3 + 4, \quad \partial 5 = 1 + 3 + 5, \\ \delta 2 = 1 + 5 + 6, & \\ \delta 3 = 2 + 3 + 5 & \partial 6 = 1 + 2 + 3 + 6 \end{array}$$

的共同部分。((± 15.2) ~ (± 15.5) 是这种一般运算。)

§ 16 节点电流源和闭路电压源网络的直接分析法

把前节的 (± 15.1) 形式地解出来, 就成为

$$\begin{array}{l|l} V_b = (D_{xx}^a y^{xx} D_{\lambda}^{b})^{-1} s^a & J^p = (R_q^{\lambda} z_{\lambda\lambda} R_{\lambda}^p)^{-1} e_q \\ = (y^{ab})^{-1} s^a & = (z_{qp})^{-1} e_q \\ \stackrel{d}{=} z_{ba} s_a, & \stackrel{d}{=} y^{pq} e_q, \end{array} \quad \begin{array}{l} (+16.1) \\ (-16.1) \end{array}$$

z_{ba} 和 y^{pq} 可以按照 Cramer 法则^①各从 y^{ab} 和 z_{qp} 的逆方阵中求

① 参考附录 1。

得,分别为

$$z_{ba} \stackrel{\text{def}}{=} (y^{ab})^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} Y_{ba}/Y, \quad (+16.2)$$

$$y^{pq} \stackrel{\text{def}}{=} (z_{qp})^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} Z^{pq}/Z, \quad (-16.2)$$

这里,

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} m! D_{[x_1 \dots x_m]} y^{x_1 \lambda_1} \dots y^{x_m \lambda_m} D_{[\lambda_1 \dots \lambda_m]}, \quad (+16.3)$$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} k! R^{[\lambda_1 \dots \lambda_k]} z_{\lambda_1 x_1} \dots z_{\lambda_k x_k} R^{[x_1 \dots x_k]}, \quad (-16.3)$$

$$Y_{ba} \stackrel{\text{def}}{=} m! m D_{[a x_1 \dots x_m]} y^{x_1 \lambda_1} \dots y^{x_m \lambda_m} D_{[\lambda_1 \dots \lambda_m]}, \quad (+16.4)$$

$$Z^{pq} \stackrel{\text{def}}{=} k! k R^{[q \lambda_1 \dots \lambda_k]} z_{\lambda_1 x_1} \dots z_{\lambda_k x_k} R^{[x_1 \dots x_k]}. \quad (-16.4)$$

\dot{a} 是新插入的从节点 a 出发指向节点 $m+1$ (假设在这一点节点电位是零)的枝。

\dot{q} 是新插入的枝,做法是这样:反树上有一枝对应于閉路 q (§ 11 开头所说的那种原始閉路), \dot{q} 就依閉路的走向串联在这一枝的一端^①。

因此

“ Y 是前指标 $x_1 \dots x_m$ 和后指标 $\lambda_1 \dots \lambda_m$ 都成树的那些 $y^{x_1 \lambda_1} \dots y^{x_m \lambda_m}$ 的代数和,各项的符号与 $D_{[x_1 \dots x_m]}/D_{[\lambda_1 \dots \lambda_m]}$ 的相同^②。”

“ Z 是前指标 $\lambda_1 \dots \lambda_k$ 和后指标 $x_1 \dots x_k$ 都成反树的那些 $z_{\lambda_1 x_1} \dots z_{\lambda_k x_k}$ 的代数和,各项的符号与 $R^{[\lambda_1 \dots \lambda_k]}/R^{[x_1 \dots x_k]}$ 的相同^②。”

这种关系簡記为

$$Y: \quad t \overset{y}{\cap} t, \quad (+16.5)$$

$$Z: \quad \bar{t} \overset{z}{\cap} \bar{t}, \quad (-16.5)$$

特別,当沒有相互結合的时候,如果把 Y, Z 分別記为 T, \bar{T} , 那末

① 参看后面图 - 17.2. 对于 \dot{q} 这样的枝, $R_{m+1}^{\dot{q}} = \delta_{m+1}^{\dot{q}}$. 所以在行列式 Z 內, 元素 z_{qp} 的余子式 Z^{pq} 可以表成 (-16.4)。参看附录 1 关于 Cramer 法則的說明, 那里用 Δ_j^i 代替通常的記号 δ_j^i . ——譯者注

② 参看 § 12。

“ T 是成为树的 y 的积 $y \cdots y$ 的和”。这关系简记为

$$T:t, \quad (+16.6)$$

又如果

把节点 a 和节点 $m+1$ 看做同一节点时接續中的树记为 $t(a)$,

“ \bar{T} 是成为反树的 z 的积 $z \cdots z$ 的和。”这关系简记为

$$\bar{T}:\bar{t}, \quad (-16.6)$$

把相当于闭路 q 的反树的枝的一端开放时接續中的反树记为 $\bar{t}(q)$,

那末分子是代数和

$$Y_{ba}:t(a) \bigcap t(b), \quad (+16.7)$$

$$Z^{pq}:\bar{t}(q) \bigcap \bar{t}(p), \quad (-16.7)$$

它的各项的符号根据

$$D_{[a\lambda_1 \cdots \lambda_m]} / D_{[b\lambda_1 \cdots \lambda_m]}$$

$$R^{[q\lambda_1 \cdots \lambda_n]} / R^{[p\lambda_1 \cdots \lambda_n]}$$

的图解判断来决定。沒有相互結合时 Y_{ba} , Z^{pq} 改写成 T_{ba} , \bar{T}^{pq} .

$$T_{bb}:t(b),$$

$$\bar{T}^{pp}:\bar{t}(\bar{p}),$$

$$T_{ba}(b \neq a):t(a) \cap t(b),$$

$$\bar{T}^{pq}(p \neq q):\bar{t}(q) \cap \bar{t}(p),$$

$$(+16.8)$$

$$(-16.8)$$

$T(\bar{T})$ 的項数等于能够把枝組成两个相等的树(反树)的組合的种数。这数可以当做下列的行列式 D 和 R 来計算。又 T/\bar{T} 等于枝的自导納的积, \bar{T}/T 等于枝的自阻抗的积。(一般, Y/Z 等于枝导納方陣的行列式, Z/Y 等于枝阻抗方陣的行列式^{[15], [16]}。)这些在驗算过程中时常用到。

“假設所有的 y 都是 1, 那末 T 就是树的組合数目”。这数目等于

$$D = |D_{\lambda}^a \delta^{\lambda\lambda} D_{\lambda}^b|, \quad (+16.9)$$

計算一下得到

“假設所有的 z 都是 1, 那末 \bar{T} 就是反树的組合数目”。这数目等于

$$R \stackrel{\Delta}{=} |R_{\lambda}^a \delta_{\lambda\lambda} R_{\lambda}^b|, \quad (-16.9)$$

計算一下得到

$$\begin{aligned}
 T = & \overset{123}{yyy} + \overset{124}{yyy} + \overset{125}{yyy} + \overset{126}{yyy} \\
 & + \overset{134}{yyy} + \overset{136}{yyy} + \overset{145}{yyy} + \overset{156}{yyy} \\
 & + \overset{235}{yyy} + \overset{236}{yyy} + \overset{245}{yyy} + \overset{246}{yyy} \\
 & + \overset{345}{yyy} + \overset{346}{yyy} + \overset{356}{yyy} + \overset{456}{yyy}.
 \end{aligned}$$

至于分子以 T_{11} , T_{21} 为例各是

$$T_{11}: t(1), T_{21}: t(1) \cap t(2),$$

由图 +17.1 各得到

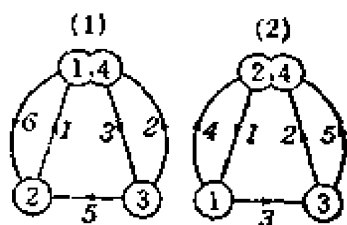


图 +17.1

$$t(1): 12, 13, 15, 25, 26, 35, 36, 56,$$

$$t(2): 12, 13, 15, 23, 24, 34, 35, 45,$$

$$\therefore t(1) \cap t(2): 12, 13, 15, 35.$$

因此

$$\begin{aligned}
 z_{11} &= T_{11}/T \\
 &= (\overset{12}{yy} + \overset{13}{yy} + \overset{15}{yy} + \overset{25}{yy} + \overset{26}{yy} \\
 &\quad + \overset{35}{yy} + \overset{36}{yy} + \overset{56}{yy})/T,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_{21} &= T_{21}/T \\
 &= (\overset{12}{yy} + \overset{13}{yy} + \overset{15}{yy} + \overset{35}{yy})/T.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T} = & \overset{123}{zzz} + \overset{124}{zzz} + \overset{125}{zzz} + \overset{126}{zzz} \\
 & + \overset{135}{zzz} + \overset{136}{zzz} + \overset{145}{zzz} + \overset{146}{zzz} \\
 & + \overset{234}{zzz} + \overset{236}{zzz} + \overset{245}{zzz} + \overset{256}{zzz} \\
 & + \overset{345}{zzz} + \overset{346}{zzz} + \overset{356}{zzz} + \overset{456}{zzz}.
 \end{aligned}$$

至于分子各以 \bar{T}^{44} , \bar{T}^{54} 为例各是

$$\bar{T}^{44}: \bar{t}(\bar{4}), \bar{T}^{54}: \bar{t}(\bar{4}) \cap \bar{t}(\bar{5}),$$

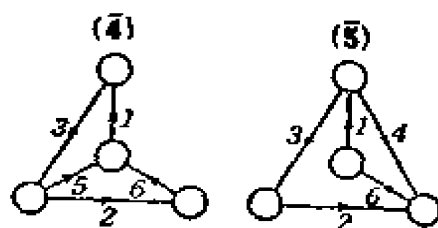


图 -17.1

$$\bar{t}(\bar{4}): 12, 15, 16, 23, 25, 35, 36, 56,$$

$$\bar{t}(\bar{5}): 12, 13, 14, 24, 26, 34, 36, 46,$$

$$\therefore \bar{t}(\bar{4}) \cap \bar{t}(\bar{5}): 12, 36.$$

$$\begin{aligned}
 y^{44} &= \bar{T}^{44}/\bar{T} \\
 &= (\overset{12}{zz} + \overset{15}{zz} + \overset{16}{zz} + \overset{23}{zz} + \overset{25}{zz} + \overset{35}{zz} \\
 &\quad + \overset{36}{zz} + \overset{56}{zz})/\bar{T},
 \end{aligned}$$

又由图 -17.2 知道

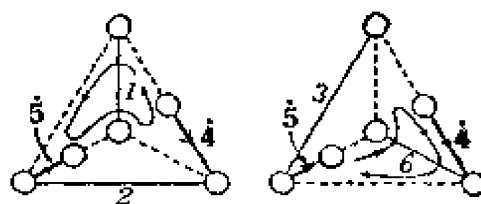


图 -17.2

$$\begin{aligned} R^{[412]} &= -R^{[512]}, \\ R^{[436]} &= R^{[536]}, \end{aligned}$$

所以

$$y^{54} = T^{54} / T = (-z_{13}z_{25} + z_{36}z_{52}) / \bar{T}.$$

有相互結合时，只要在以上各項之外找出这种結合有关的項再添加上去就可以了。

例如，如果 y^{25} , $y^{52} (\neq y^{25})$ 存在，那末分母添上

- (i) $y^{x_1\lambda_1}y^{x_2\lambda_2}y^{25}$, 即 $y^{x_1x_2}y^{25}$,
- (ii) $y^{x_1\lambda_1}y^{x_2\lambda_2}y^{52}$, 即 $y^{x_1x_2}y^{52}$,
- (iii) $y^{x_2}y^{25}y^{52}$, 即 $y^{x_2}y^{25}y^{52}$

这样的項。因此各可以从①

- (i) $t(2) \cap t(5) = t(25) \cap t(52)$,
- (ii) 同(i),
- (iii) $t(25)$

中得到，即

$$\begin{aligned} t(25) &: 13, 14, 16, 36, 46, \\ t(52) &: 14, 16, 34, 36, 46, \\ \therefore t(25) \cap t(52) &: 14, 16, 36, 46. \\ \text{又 } t(25) &: 1, 3, 4. \end{aligned}$$

其次檢查符号。由图，

$$D_{[x\lambda 5]} = D_{[x\lambda 5]},$$

又由指标的次序，

$$D_{[x25]} = -D_{[x52]}$$

例如，如果 z_{25} , $z_{52} (\neq z_{25})$ 存在，那末分母添上

- (i) $z_{\lambda_1x_1}z_{\lambda_2x_2}z_{25}$, 即 $z_{\lambda_1\lambda_2}z_{25}$,
- (ii) $z_{\lambda_1x_1}z_{\lambda_2x_2}z_{52}$, 即 $z_{\lambda_1\lambda_2}z_{52}$,
- (iii) $z_{\lambda_2}z_{25}z_{52}$, 即 $z_{\lambda_2}z_{25}z_{52}$

- (i) $\bar{t}(\bar{2}) \cap \bar{t}(\bar{5}) = \bar{t}(\bar{25}) \cap \bar{t}(\bar{52})$,
- (ii) 同(i),
- (iii) $\bar{t}(\bar{25})$

中得到，即

$$\begin{aligned} \bar{t}(\bar{25}) &: 13, 14, 16, 34, 36, \\ \bar{t}(\bar{52}) &: 13, 14, 34, 36, 46, \\ \therefore \bar{t}(\bar{25}) \cap \bar{t}(\bar{52}) &: 13, 14, 34, 36. \\ \text{又 } \bar{t}(\bar{25}) &: 1, 4, 6. \end{aligned}$$

$$R^{[\lambda x 2]} = -R^{[\lambda x 5]},$$

$$R^{[\lambda 25]} = -R^{[\lambda 52]},$$

① (x) 和 $(\bar{\lambda})$ 等各表示把枝 x 变成短路和把枝 λ 变成开路以后的接續。

所以

$$\begin{aligned} Y = T + (y_{14} + y_{16} + y_{36} + y_{46}) (y^{25} + y^{52}) - (y_{14} + y_{36} + y_{46}) y^{25} y^{52}. \\ Z = \bar{T} - (z_{13} + z_{14} + z_{34} + z_{36} + z_{52}) - (z_{14} + z_{36} + z_{52}) z_{25} z_{52}. \end{aligned}$$

分子也可以同样求得,从略。

§ 18 枝电流源和枝电压源网络

解齐次 2-Kh (-9.5) 时会得到 (-9.7):

$$U_{\lambda} = D_{\lambda}^b V_b \quad (e_{\lambda} = 0).$$

V_b 是由节点电流源 s^a 产生的节点电位

$$V_b = z_{ba} s^a.$$

因此由

$$s^a = D_{a,x}^x s^x$$

所定义的 s^x 叫做**枝电流源**。

显然,

$$U_{\lambda} = D_{\lambda x} s^x \quad (e_{\lambda} = 0),$$

$$D_{\lambda x} \stackrel{a}{=} D_{\lambda}^b z_{ba} D_{a,x}^x. \quad (+18.1)$$

z_{ba} 和 y^{pq} 根据 § 16 就可以得到。实际上把 (+16.2), (+16.3), (+16.4) 代入计算一下就得到

$$D_{\lambda x} = m! \, m D_{[x x_1 \dots x_m]} y^{x_2 \lambda_2} \dots y^{x_m \lambda_m} D_{[\lambda \lambda_1 \dots \lambda_m]} / Y, \quad (+18.2)$$

$$R^{x\lambda} = k! \, k R^{(\lambda \lambda_1 \dots \lambda_k)} z_{\lambda_1 x_1} \dots z_{\lambda_k x_k} R^{[x x_1 \dots x_k]} / Z. \quad (-18.2)$$

分子各表示成

$$t(x) \bigcap^y t(\lambda). \quad (+18.3)$$

$$\bar{t}(\bar{\lambda}) \bigcap^z \bar{t}(\bar{x}). \quad (-18.3)$$

以下的实例的直接计算按照前一节进行。

① 电压源也叫电动势。下同。

解齐次 1-Kh (+9.5) 时会得到 (+9.7):

$$I^x = R_{x,p}^x J^p \quad (s^x = 0).$$

J^p 是由闭路电动势 e_q 产生的闭路电流

$$J^p = y^{pq} e_q.$$

因此由

$$e_q = R_q^{\lambda} e_{\lambda}$$

所定义的 e_{λ} 叫做**枝电压源**①。

$D_{\lambda\kappa}$ 和 $R^{\kappa\lambda}$

(i) 当 $\kappa = \lambda$ 时各是合成的枝阻抗和导纳,

(ii) 当 $\kappa \neq \lambda$ 时各是传输枝阻抗和导纳。

特别在沒有相互結合的情况下, 根据 § 13 的考察, 得到传输阻抗 ($\kappa \neq \lambda$) 的公式^{[18], [21]}

$$D_{\lambda\kappa} = L_{\partial\lambda, \partial\kappa} / T. \quad (+18.4)$$

这里 $\partial\lambda = c - d$, $\partial\kappa = a - b$,

$$(+i) \begin{cases} L_{\partial\lambda, \partial\kappa} = L_{c-d, a-b} = T_{ca, db} - T_{cb, da}, \\ T_{ca, db} \text{ 是属于 } t_{ca, db} \text{ 的各个双树的枝导纳 } y^x \text{ 的乘积的和;} \\ T_{cb, da} \text{ 是属于 } t_{cb, da} \text{ 的各个双树的枝导纳 } y^x \text{ 的乘积的和。} \end{cases}$$

和它部分地成对偶的传输导纳的公式是

$$R^{\kappa\lambda} = L^{\partial\kappa, \partial\lambda} / \bar{T}. \quad (-18.4)$$

这里

$$(-i) \begin{cases} \bar{L}^{\partial\kappa, \partial\lambda} = \bar{L}^{a-b, c-d} = -\bar{T}^{ac, bd} + \bar{T}^{ad, bc}, \\ \bar{T}^{ac, bd} \text{ 是属于 } \bar{t}^{ac, bd} \text{ 的各个双反树的枝阻抗 } z_{\lambda}^x \text{ 的乘积的和;} \\ \bar{T}^{ad, bc} \text{ 是属于 } \bar{t}^{ad, bc} \text{ 的各个双反树的枝阻抗 } z_{\lambda}^x \text{ 的乘积的和。} \end{cases}$$

此外, 如果考察范围限于平面网络(与球面同胚的东西)^①, 那末可以得到以上公式的对偶形式

$$R^{\kappa\lambda} = \bar{L}^{\partial\kappa, \partial\lambda} / \bar{T} \quad (-18.5)$$

和

$$D_{\lambda\kappa} = L_{\partial\lambda, \partial\kappa} / T. \quad (+18.5)$$

① 参考 § 21。如果没有这限制, 则 (+18.4) 和 (-18.5), (-18.4) 和 (+18.5) 的对偶对应不成立。

这里所有的反树的枝都夹在相邻的 2 维胞中间, 与其他的 2 维胞没有直接的联系, 所以

$$\begin{aligned} \delta x &= q - p, \quad \delta \lambda = s - r, \\ (+ii) \quad &\left\{ \begin{aligned} \bar{L}^{\delta x, \delta \lambda} &= \bar{L}^{q-p, s-r} = \bar{T}^{qs, pr} - \bar{T}^{qr, ps}, \\ \bar{T}^{qs, pr} &\text{是属于 } \bar{t}^{qs, pr} \text{ 的各个双反树的枝的阻抗 } z_{\lambda} \\ &\text{的乘积的和;} \\ \bar{T}^{qr, ps} &\text{是属于 } \bar{t}^{qr, ps} \text{ 的各个双反树的枝的阻抗 } z_{\lambda} \\ &\text{的乘积的和,} \end{aligned} \right. \\ (-ii) \quad &\left\{ \begin{aligned} L_{\delta \lambda, \delta x} &= L_{s-r, q-p} = -T_{sq, rp} + T_{sp, rq}, \\ T_{sq, rp} &\text{是属于 } t_{sq, rp} \text{ 的各个双树的导纳 } y^{\times} \text{ 的乘积} \\ &\text{的和;} \\ T_{sp, rq} &\text{是属于 } t_{sp, rq} \text{ 的各个双树的导纳 } y^{\times} \text{ 的乘} \\ &\text{积的和。} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

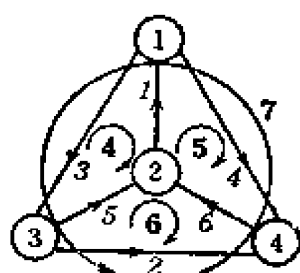


图 18.1

例如在图 18.1 的情况下,

$$\begin{cases} \partial 1 = 2 - 1, \\ \partial 2 = 3 - 4, \\ \delta 1 = 5 - 4, \\ \delta 2 = 7 - 6, \end{cases}$$

所以

(±i)

$$D_{21} = L_{\partial 2, \partial 1} / T,$$

$$L_{\partial 2, \partial 1} = L_{3-4, 2-1} = T_{32, 41} - T_{31, 42};$$

$$R^{21} = \bar{L}^{\partial 2, \partial 1} / \bar{T},$$

$$\bar{L}^{\partial 2, \partial 1} = \bar{L}^{3-4, 2-1} = -\bar{T}^{32, 41} + \bar{T}^{31, 42};$$

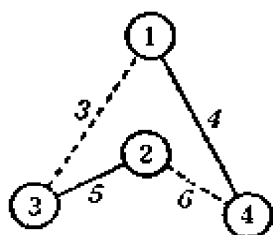


图 18.2

$$t_{32, 41} = 45,$$

$$\bar{t}^{32, 41} = 36;$$

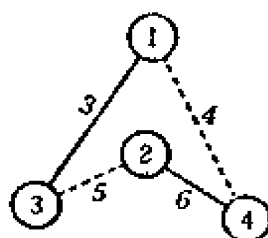


图 18.3

$$t_{31, 42} = 36,$$

$$\bar{t}^{31, 42} = 45.$$

因此 $D_{21} = (\overset{45}{yy} - \overset{36}{yy}) / T$, $R^{21} = (-\overset{36}{zz} + \overset{45}{zz}) / \bar{T}$.

$$(\pm ii) \quad R^{21} = \bar{L}^{\delta 2, \delta 1} / \bar{T},$$

$$\bar{L}^{\delta 2, \delta 1} = \bar{L}^{7-6, 5-4} = \bar{T}^{75, 64} - \bar{T}^{74, 65};$$

$$D_{21} = L_{\delta 2, \delta 1} / T,$$

$$L_{\delta 2, \delta 1} = L_{7-6, 5-4} = -T_{75, 64} + T_{74, 65};$$

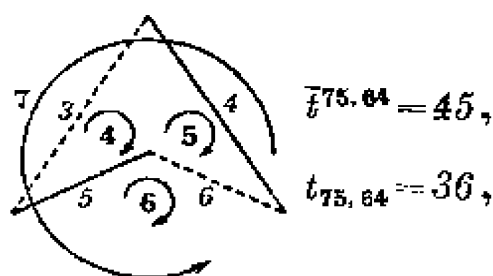


图 -18.2

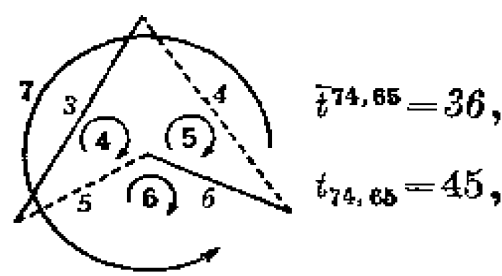


图 -18.3

因此 $R^{21} = (\overset{36}{zz} - \overset{45}{zz}) / \bar{T}$, $D_{21} = (-\overset{36}{yy} + \overset{45}{yy}) / T$.

§ 19 四端网络的常数

前节的公式都直接适用于一般的 n 端网络。由于习惯和实用上的方便,对于四端网络的情况,这些公式是在所谓四端网络常数的名义下引用的,因为常常要用这种计算,所以这里特地把结果写出来。

四端网络的输入和输出端各用 I 和 II 这个枝代表(参照图 19.1)。输入和输出端的电压和电流各假定是 E_I, E_{II}, I^I, I^{II} , 那末一般有下列关系:

$$\begin{bmatrix} E_I \\ I^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I^{II} & B_I^{II} \\ C_I^{II} & D_I^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{II} \\ I^{II} \end{bmatrix}, \quad (19.1)$$

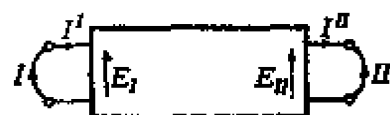


图 19.1

这里 $A_I^{II}, B_I^{II}, C_I^{II}, D_I^{II}$ 叫做四端网络的常数。这个图解法用前述记号表示时有如表 ±19.1。

表 +19.1 y^{xx} 已知的情况

		指标(枝的组合)	符 号
分 母		$t(I \bar{I}) \overset{y}{\cap} t(\bar{I} II)$	$D_{[I...]} / D_{[II...]}$
分 子	A_I^{II}	$t(I \bar{I}) \overset{y}{\cap} t(I \bar{I})$	$\frac{I \bar{I}}{D_{[...]} / D_{[...]$
	B_{II}	$t(II) \overset{y}{\cap} t(II)$	$\frac{II}{D_{[...]} / D_{[...]$
	C^{II}	$t(\bar{I} \bar{I}) \overset{y}{\cap} t(\bar{I} \bar{I})$	$\frac{\bar{I} \bar{I}}{D_{[...]} / D_{[...]$
	D^{II}	$t(\bar{I} II) \overset{y}{\cap} t(\bar{I} II)$	$\frac{I \bar{I}}{D_{[...]} / D_{[...]$

表 -19.1 z_{xx} 已知的情况

		指标(枝的组合)	符 号
分 母		$\bar{t}(\bar{I} \bar{I}) \overset{z}{\cap} \bar{t}(I \bar{I})$	$-R_{[I...]} / R_{[II...]}$
分 子	A_I^{II}	$\bar{t}(I \bar{I}) \overset{z}{\cap} \bar{t}(I \bar{I})$	$\frac{R_{[...]} / R_{[...]} }{I \bar{I} \quad I \bar{I}}$
	B_{II}	$\bar{t}(II) \overset{z}{\cap} \bar{t}(II)$	$\frac{R_{[...]} / R_{[...]} }{II \quad II}$
	C^{II}	$\bar{t}(\bar{I} \bar{I}) \overset{z}{\cap} \bar{t}(\bar{I} \bar{I})$	$\frac{R_{[...]} / R_{[...]} }{\bar{I} \bar{I} \quad \bar{I} \bar{I}}$
	D^{II}	$\bar{t}(\bar{I} II) \overset{z}{\cap} \bar{t}(\bar{I} II)$	$\frac{R_{[...]} / R_{[...]} }{\bar{I} II \quad \bar{I} II}$

这里, () 中的 I 或 II 各表示改成短路的枝, \bar{I} 或 \bar{II} 各表示改成开路的枝。 D 和 R 的上或下的指标也有同样的意义。

第5章 网络的变换

§ 20 等价网络

两个实际联接方法不同的电网络，只要施加量和响应量之间的关系即阻抗（导纳）是一样的，就说是**等价的**。在工程上如果遇到性质复杂的网络，总想把它变换成比较简单的网络。因此如果研究了各种各样的**等价网络**，能够把原来网络的全部或者一部分变换成适当的等价网络，使网络的分析 and 实验更容易，那是有很大价值的。

例如不更动一个所设的网络的节点，只适当地变动联在它们之间的枝的种类、排列和数目，同时保持节点和节点间的相互导纳和节点的自导纳不变，那末从一切可能的等价网络中选择一个最简单的来用在节点电位-节点电流源分析上是很合适的。又例如闭路不更动，只更动邻接的情况，同时使闭路间的相互阻抗和闭路的自阻抗保持不变，那末从一切可能的等价网络中选择一个最简单的来用在闭路电流-闭路电动势的分析上也是很合适的。因此在前一种情况下可以用象图 +20.1 那样的**端子型**（星形）等价网络，在后一种情况下可以用象图 -20.1 那样的**闭路型**（闭路枝集）等价网络。（枝和节点、闭路指标的关系以后再说。）图 -20.1 里用虚线画的闭曲线是为了指出所有的实闭路结合在一起。（除了实线闭路以外没有其他独立闭路。）

一般，如果元素间的相互导纳是完全自由的，那末这样的变换总是可能的，但是如果有附带的限制，也可能有困难。一个最简单例子是所谓 Δ - Y 变换^①。

^① 还可以参考本丛书伏见-庄司：《结晶统计与代数》，孙泽瀛译，§ 4。

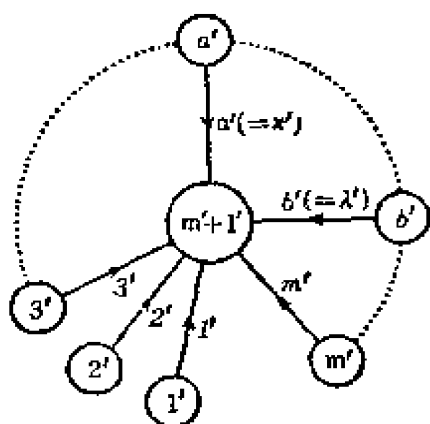


图 +20.1

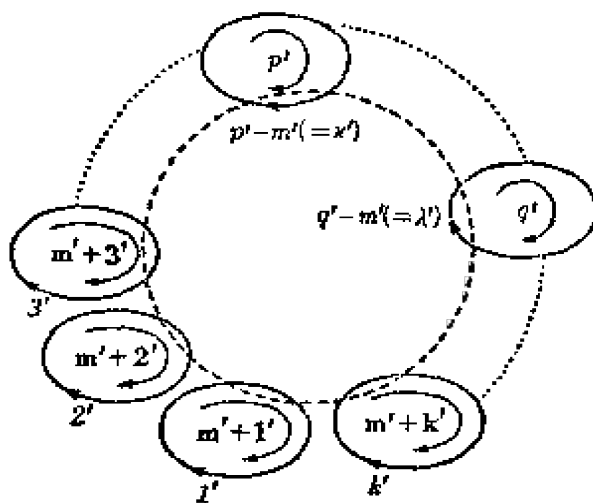


图 -20.1

这是由只有自导纳的枝所组成的网络之间的相互变换。先考虑1维星形接续跟完全 m 边形接续之间的变换，自导纳如图 ±20.2。这个无源网络在外部电压电流分布不变的条件下，等价条件是

$$\frac{ab}{y} = \frac{\frac{a}{y} \frac{b}{y}}{\frac{1}{y} + \frac{2}{y} + \cdots + \frac{n}{y}}. \quad (+20.1)$$

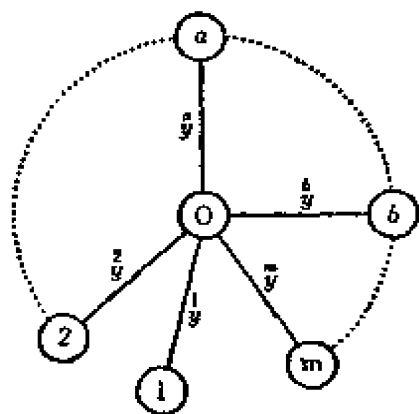


图 +20.2

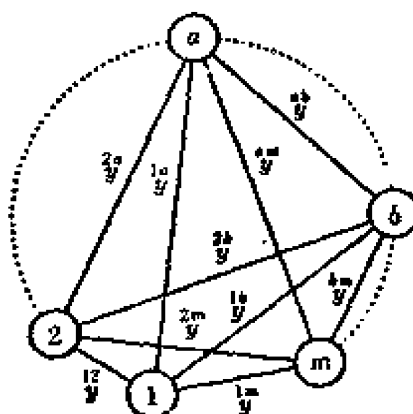


图 -20.2

因此图+20.2的 m 星形可以变换成图-20.2的完全 m 多边形。可是反变换不一定可能。因为 y 的个数比 $\frac{ab}{y}$ 的个数少。只有当

$$m = \frac{1}{2} m(m-1) \quad (20.2)$$

的时候两者的个数才一致, 这时两个方向的变换都可能。除了 $m=0$ 以外, 只能是 $m=3$, 即限于 Δ -Y 变换 (图 ±20.3)。这时 (+20.1) 变成

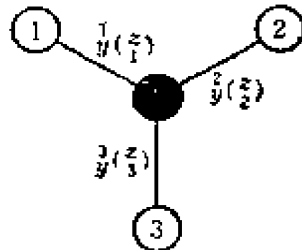


图 +20.3

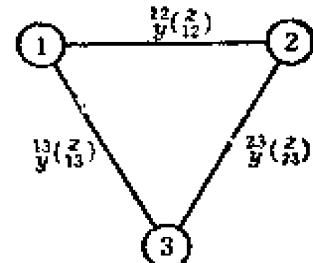


图 -20.3

$$y = \frac{ab}{\frac{1}{y} + \frac{a}{y_2} + \frac{b}{y_3}} \quad (+20.3)$$

$$z = \frac{\frac{z}{ab} + \frac{z}{ac}}{\frac{z}{12} + \frac{z}{13} + \frac{z}{23}} \quad (-20.3)$$

($a, b, c=1, 2, 3; a \neq b \neq c \neq a$). 用这个 Δ -Y 变换改变网络的一部分, 使整个网络变成比较简单的网络的方法是大家熟悉的。

一般, 对于电网络, 与其把各枝的电流、电位差当做直接的未知数, 不如先把节点电位或闭路电流当做未知数, 求出以后再来决定前者更方便。这时候, 使节点电位或闭路电流不变的等价变换是有效的。一个网络的节点电位, 闭路电流的解由基本公式可以写成

$$\begin{aligned} V_b &= z_{ba}(s^a - D_{\lambda\lambda}^a y^{\lambda\lambda} e_\lambda) \\ &= (D_{\lambda\lambda}^a y^{\lambda\lambda} D_{\lambda\lambda}^b)^{-1} \\ &\quad \cdot (s^a - D_{\lambda\lambda}^a y^{\lambda\lambda} e_\lambda), \end{aligned} \quad (+20.4)$$

$$\begin{aligned} J^p &= y^{pq}(e_q - R_q^{\lambda\lambda} z_{\lambda\lambda} s^\lambda) \\ &= (R_q^{\lambda\lambda} z_{\lambda\lambda} R_{\lambda\lambda}^q)^{-1} \\ &\quad \cdot (e_q - R_q^{\lambda\lambda} z_{\lambda\lambda} s^\lambda), \end{aligned} \quad (-20.4)$$

所以如果拿图 ±20.1 那样的端子型 (星形) 或闭路型 (闭路枝集) 的等价网络来考虑, 那末为了方便起见可以令

$$\text{枝 } \kappa', \lambda': 1', 2', \dots, m' \quad | \quad \text{枝 } \lambda', \kappa': 1', 2', \dots, k'$$

对应于

$$\text{点 } a', b': 1', 2', \dots, m', \quad | \quad \text{闭路 } q', p': m'+1', m'+2', \dots, m'+k',$$

于是电源各只有节点电流源 $s^{a'}$, 闭路电压源 $e_{q'}$, 因此

$$\left. \begin{aligned} V_{b'} &= (D_{\lambda'}^{a'} y^{x' \lambda'} D_{\lambda'}^{b'})^{-1} s^{a'}, \\ & \quad (+20.5) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} J^{p'} &= (R_{q'}^{x'} z_{\lambda' x'} R_{p'}^{x'})^{-1} e_{q'}. \\ & \quad (-20.5) \end{aligned}$$

为了使 $V_{b'} = V_b$, $J^{p'} = J^p$, 只要利用在这情况下 $D_{\lambda'}^{a'}$, $R_{q'}^{x'}$ 都是单位方阵的事实, 可以令

$$\left[y^{x' \lambda'} \right] = \left[D_{\lambda'}^{a'} y^{x \lambda} D_{\lambda'}^{b'} \right], \quad \left[z_{\lambda' x'} \right] = \left[R_{q'}^{x'} z_{\lambda x} R_{p'}^{x'} \right], \quad \begin{aligned} & \quad (+20.6) \\ & \quad (-20.6) \end{aligned}$$

$$s^{a'} = s^a - D_{\lambda'}^{a'} y^{x \lambda} e_{\lambda}, \quad (+20.7) \quad e_{q'} = e_q - R_{q'}^{x'} z_{\lambda x} s^x. \quad (-20.7)$$

(±20.6) 是决定等价网络元素 (枝) 的导纳 (阻抗) 的关系式。
(±20.7) 称为**等价电源原理**, 而且也是把枝电压源变换成节点电流源, 把枝电流源变换成闭路电压源的关系式。如果可以对一个网络的全部或者一部分施行这种等价变换, 那末就可以由此得到比较简单的网络。

电网络以外有些东西也能用电网络来模拟, 这也称为**等价网络**, 由此得到有效的模拟分析工具。

§ 21 对偶变换

把闭路变成节点, 把节点变成闭路, 从而把联接两点的枝变成包围一个 2 维闭路的枝, 这种对偶的变换, 在实用分析上时常发挥很大的作用。(图 21.1 内的粗线是细线的对偶接續。)

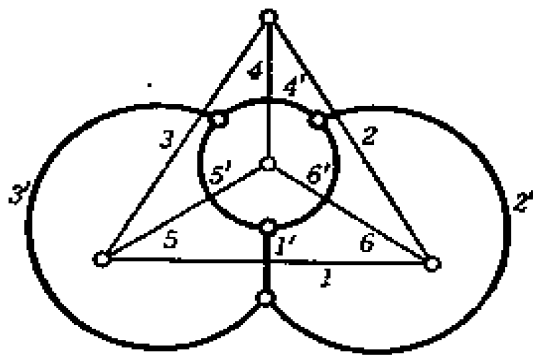


图 21.1

一般, 两个各只包含一个独立接續 (成分) 的 2 维复形成对偶对应的条件是 Betti 数 R^p , R'^p 和反 Betti 数 R_p , R'_p 之间有

$$R^2 = R_2 = R'_0 = R'^0 = 1,$$

$$1 = R^0 = R_0 = R'_2 = R'^2, \quad R^1 = R_1 = R'_1 = R'^1$$

这样的关系。而且如果把 1 維圈都張在面上看成 2 維胞的边界，那末

$$R^2 = R_1 = R'_1 = R'^2 = 0$$

必須成立(参考 § 4)。因此双方的 Euler-Poincaré 特征数 χ, χ' 滿足 Euler 多面体条件 (± 3.9)。

从北极把球投影到平面上去是一个拓扑变换。从这里就可以知道平面接續图形跟 Euler 多面体是同胚的。因此在网络分析中可以利用对偶变换的是平面接續。这时如果把接續矩陣，閉路矩陣各記为 $D^i_{\alpha}, R^k_{\beta}; \bar{D}^k_{\alpha}, \bar{R}^i_{\beta}$ ，那末

$$D^i_{\alpha} = \bar{R}^i_{\beta}, \quad (+21.1) \quad R^k_{\beta} = \bar{D}^k_{\alpha}, \quad (-21.1)$$

因此由基本公式得到

$$D^i_{\alpha} \delta^{\alpha\lambda} \bar{D}^k_{\lambda} = 0, \quad (+21.2) \quad R^k_{\beta} \delta_{\alpha\lambda} \bar{R}^{\lambda}_{\beta} = 0, \quad (-21.2)$$

在两个成对偶对应的接續中，

$$\begin{aligned} \text{閉路} \begin{Bmatrix} \text{电 流} \\ \text{电动势} \end{Bmatrix} &\longleftrightarrow \text{节点} \begin{Bmatrix} \text{电 位} \\ \text{电流源} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \text{阻抗} \\ \text{导納} \end{Bmatrix} &\longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{导納}, \\ \text{阻抗}, \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

如果再令这些相互对应的量的数值相等，那末一切电工学上的特性都成对偶的对应。

§ 8 的結構力学中的 Cremona 变换是和这类似的一个例子，平面桁架和 Cremona 应力平面滿足 Euler 多面体条件是显然的。

§ 22 网络的分裂法

从 Cremona 变换的可能性来看也知道不單純的桁架特別是不靜定結構的应力分析是件累贅事，因此大家往往設法把它分割成容易分析的若干部分，把各个断面逐一分析以后再合在一起。

不静定剩余度是这种分割的数目的依据。这是历来结构力学家们的得意方法^①, 不过最近 G. Kron 提出了一种可称为上述方法的一般化和系统化的方法論, 叫“分裂法 (diakoptics)”^②。用他的話來說, 这是把“天大的問題切成細片, 个别解决, 然后归并起来”, 求得网络或場的复杂問題的实用解答。

从希腊語源来看, dia 是“来回”或“对立”的意思, kopt 是“分割”的意思。这方法含有一些不一定能保持拓扑性质的运算在內。从实用的观点来看, 这种方法和下一节的对偶的分裂法提供了实用的方法, 把那些从正面看来很难的問題在等价网络上加以簡捷解决, 因此是宝贵的。在网络特别是电网络和枝结构物的范圍中, 用这方法还可以求出精密解。但是对于場, 由于网络只是場的近似表現, 用这方法只能求出近似解。因此这里主要用电网络說明。

首先, Kron 的方法概括起来可以分成下面几个阶段。

- (i) 把所假設的网络分成几个**部分网络**。
- (ii) 对各个部分网络分头造**等价部分网络**。这相当于所謂各个独立解决的步驟。
- (iii) 把等价部分网络拼成原来的等价网络。
- (iv) 通过等价网络的分析求原网络的解。

这里介紹一个把它进一步簡化的方法的要点。例如图 +22.1 是給定的网络, 現在利用使节点电位 V , 不变的等价网络来求解^{[23], [26]}。下面的具体步驟当然不是唯一的。

- (i) 把图 +22.1 的枝 22, 23, 24, 25 切断并除外得到图

① 过去 Hardy Cross^[22], R. V. Southwell^{[23], [24]} 所热烈研究的松弛法 (relaxation method) 等也可以說是这种思想的一种发展, 不仅对结构物, 即使对工程物理学的許多方面也都可以应用。

② Kron 的論文很多, 例如 [35], [26] 等等, 其他參看 [27], [28]。

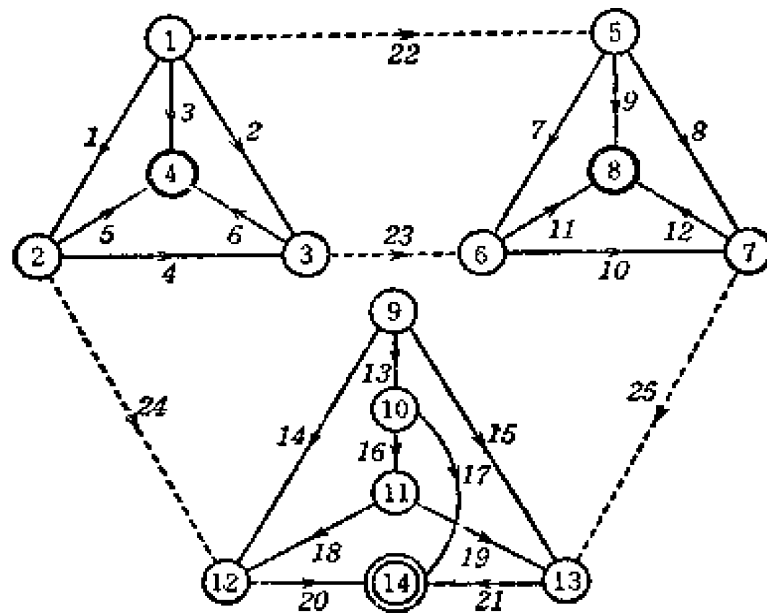


图 +22.1

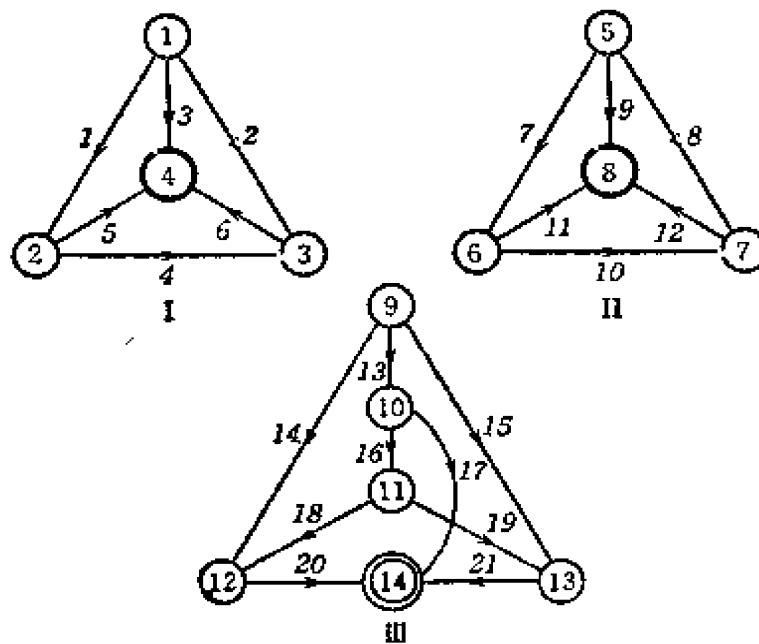


图 +22.3

+22.2 的 I, II, III 那样的部分网络。这种除掉的运算通常称为**开路**。22, 23, 24, 25 叫做**联络枝**。属于 I, II, III 的点各是 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12, 13, 14, 联络枝是属于各部分网络节点的反边界的和集:

$$\begin{aligned}
 & \delta(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4) \cup \delta(5 \cup 6 \cup 7 \cup 8) \cup \delta(9 \cup 10 \cup 11 \cup 12 \cup 13 \cup 14) \\
 &= (22 \cup 23 \cup 24) \cup (22 \cup 23 \cup 25) \cup (24 \cup 25) \\
 &= 22 \cup 23 \cup 24 \cup 25, \quad (+22.1)
 \end{aligned}$$

但是分成部分网络以后彼此之间就没有相互结合了。

也可以把全部节点都分离开，然后用下面 (ii) 的办法做一个包含全部节点的星形，不过这样就跟直接拿原网络来进行计算没有多大差别了。因为求解时逆方阵的计算要在跟原来同样高的次数下进行。因此 (i)，(ii) 的办法相当于适当地使用接續的形状把问题分成低次的来求解。

(ii) 按照图 +22.2 作起图 +22.3 那样的星形即**端子型等价部分网络**^①。其中的枝叫**端子枝**，用 κ' , λ' , ... 即图内那样地用 $1'$, $2'$, ... 命名，且带有方向。现在取 $\alpha = I, II, III$ ，并设端子枝的导纳 $y^{\kappa\lambda\alpha}$ 等于部分网络的节点导纳 $y^{a\alpha b\alpha}$ ，也就是等于

$$y^{a\alpha b\alpha} = D_{\kappa\alpha}^{a\alpha} y^{\kappa\lambda\alpha} D_{\lambda\alpha}^{b\alpha} \quad (+22.2)$$

(参考(+20.6))。如果图 +22.1 各枝的导纳是 1，那末

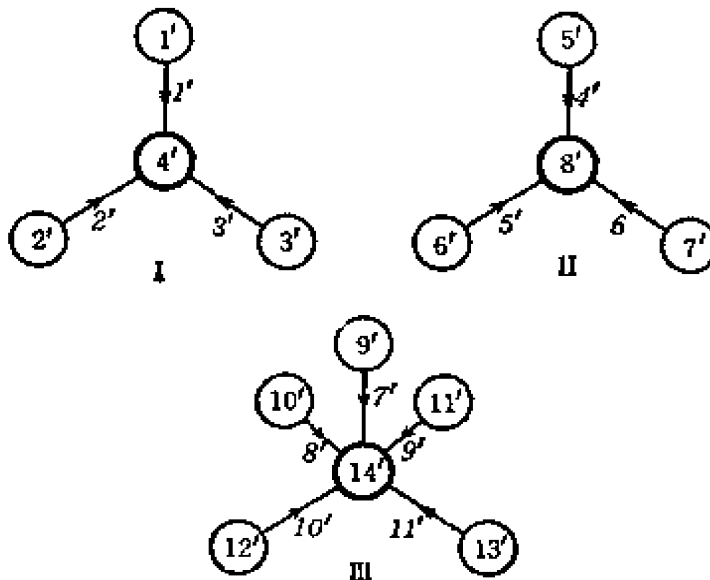


图 +22.3

① 不一定非照图 +22.3 那样置换不可，把图 +22.2 的适当的枝切断，把这枝对这枝上的点的影响分摊到别的枝上去，然后进行类似于下面的操作也行。

$$y^{a_1 b_1} = \begin{array}{c|cccccc} & \begin{array}{c} \lambda_1 \rightarrow \\ 1 \end{array} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{array}{c} a_1 \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ -1 & . & . & 1 & 1 & . \\ . & -1 & . & -1 & . & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} \leftarrow b_1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \lambda_1 \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & . \\ 1 & . & -1 \\ 1 & . & . \\ . & 1 & -1 \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} b_1 \rightarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad (+22.3)$$

因此就叫

$$y^{x'_1 M'_1} = \begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} \lambda'_1 \rightarrow \\ 1' \\ 2' \\ 3' \end{array} \\ \begin{array}{c} x'_1 \downarrow \\ 1' \\ 2' \\ 3' \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad (+22.4)$$

(iii) 把图 +22.3 的各端子型等价部分网络用联络枝联接起来构成和原来网络等价的网络,于是得到图 +22.4 那样的**端子型**(等价)网络。

以上 (i) ~ (iii) 的操作就是“把所设的网络分成联络的枝集和它们的补复形,把这样所产生的多树变形作为星形的集合,再用联络枝把它们联接起来”。

(iv) 这个端子型等价网络的电源是把原来网络的节点电流源 s^a ① 和枝电动势 e_λ ② 都包括在内的节点电流源 $s^{a'}$, 即采用

$$s^{a'} = s^a - D_{\lambda a}^{a'} y_{\lambda\lambda} e_{\lambda} \quad (\text{参考 (+20.7)})$$

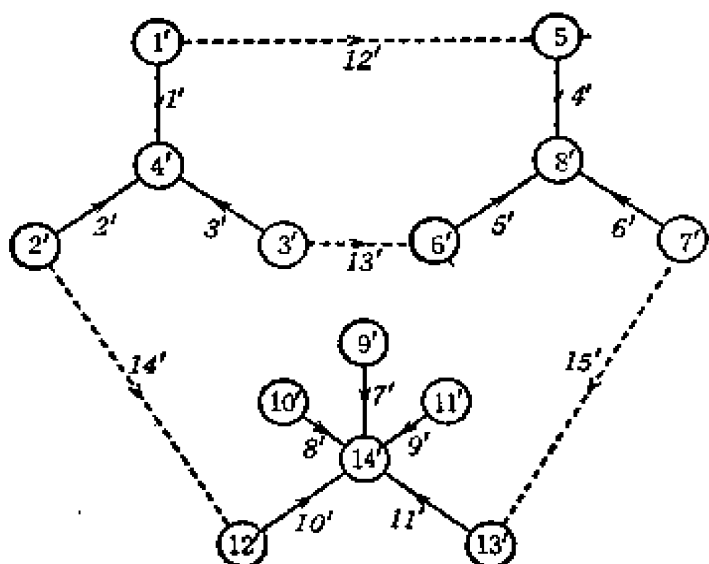


图 +22.4

这个网络的分析, 以取闭路电流 $J^{p'}$ 当未知数为便, 因为闭路比原来的减少了。 $J^{p'}$ 一决定, 马上就能决定节点电位 W_b 。这节点电位和原来网络的节点电位 V_b 一致。 V_b 一决定, 别的量的决定就不在话下了。

§ 23 对偶的分裂法

有时候, Kron 方法的对偶处理会更有效一点^{[29], [30]}。在 § 22 内不变对象是节点, 但在这里采用独立闭路做不变对象。因此等价变换时不妨方便地变动枝的分歧点。

例如图 -23.1 是给定的网络, 我们说明在这情况下怎样利用保持闭路特性的等价网络, 然后求解。

① 如果枝电流源 s^a 已知, 那末 $s^a = D_{\lambda a}^{a'} s^a$ 。

② 如果已知闭路电动势 e_q , 那末 e_λ 是 $e_q = E_{q\lambda} e_\lambda$ 的任意解。和上一个脚注的情况一样, 都可以从图形上推算出来。

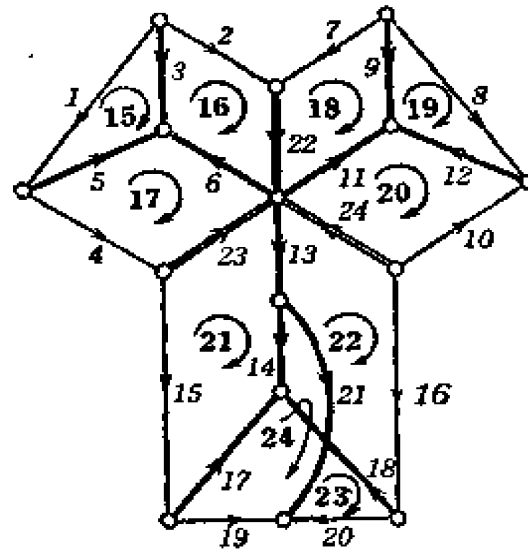


图 - 23.1

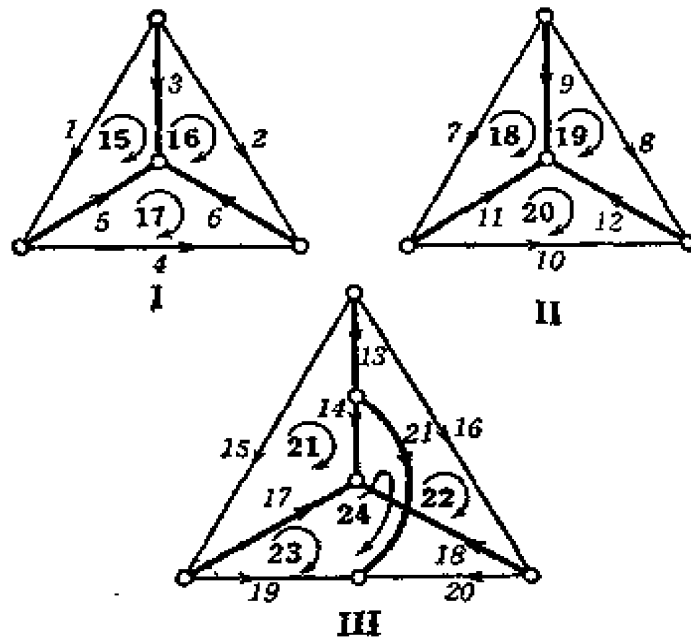


图 - 23.2

(i) 把图 - 23.1 的枝 22, 23, 24 纵割以后可得图 - 23.2 I, II, III 那样的部分网络。纵割掉的枝在考察中略去了^①, 所以这种纵割的操作和短路的操作相等。可以纵割(短路)的枝(22, 23, 24)叫**反联络枝**。属于 I, II, III 的闭路各表示做 15, 16, 17; 18, 19, 20; 21, 22, 23, 24。反联络枝集合是属于不同部分

^① 在(iii)中再考虑。

网络的闭路的共同边界上的枝的和集^①,即

$$\begin{aligned} & \{(\partial 15 \cup \partial 16 \cup \partial 17) \cap (\partial 18 \cup \partial 19 \cup \partial 20)\} \cup \\ & \cup \{(\partial 18 \cup \partial 19 \cup \partial 20) \cap (\partial 21 \cup \partial 22 \cup \partial 23 \cup \partial 24)\} \cup \\ & \cup \{(\partial 21 \cup \partial 22 \cup \partial 23 \cup \partial 24) \cap (\partial 15 \cup \partial 16 \cup \partial 17)\} \\ & = 22 \cup 23 \cup 24 \text{ ②.} \end{aligned} \quad (-23.1)$$

一般,要把 (-23.1) 变形成 $(+22.1)$ 的同样形式是不可能的,可是在下述情况下,也只有在下述情况下,这是可能的,就是当我们把平面接續中所采用的独立闭路都看成面时原来的网络变成 Euler 多面体的情况。另一方面,虽然 $(+22.1)$ 总可以变成 (-23.1) 的形式,但是不方便。

如果把枝 3, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 23, 24 都加以纵割,那末所有闭路都给反分割了,不过在这情况下要把这些等价网络组合起来,那就和在原来网络上分析差不多费力。这个方法在计算上的便利在于化成低次的逆方阵的计算。因此要注意(i)和下面的阶段(ii)的差异。

(ii) 对偶变换操作的第二阶段是求图 - 23.2 的各个部分网络的对偶等价网络。是从图 + 22.2 变到图 + 22.3 的操作的对偶。

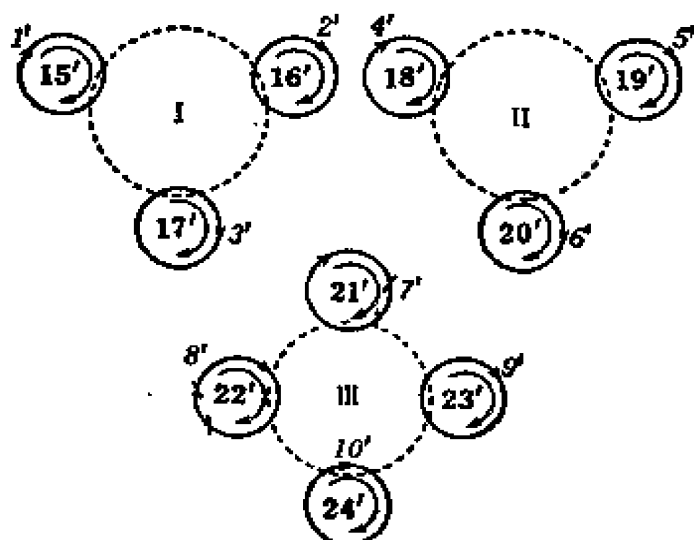


图 - 23.3

① 因此在图 - 23.1 中用重复线条表示。

② 也可以略去 ∂ 。

对应于图 - 23.2 的独立闭路, 我們做图 - 23.3 那样的**闭路型等价部分网络**①。各个网络只由一个枝构成, 称为**闭路枝**②。

因为闭路枝的阻抗 $z_{\lambda_p \pi_p}$ 假设是和原来的部分网络的闭路阻抗

$$z_{q_1 \pi_p} = R_{q_1 \pi_p}^{\lambda_p} z_{\lambda_p \pi_p} R_{\pi_p q_1}^{\lambda_p} \quad (-23.2)$$

相等的, 所以如果在图 - 23.1 的例子中假定原来网络中各枝的自阻抗是 1Ω , 那末

$$z_{q_1 \pi_p} = \begin{array}{c|cccccc} & \lambda_1 \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q_1 \downarrow & & & & & & & \\ \hline 15 & -1 & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & \\ 16 & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \\ 17 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & -1 & \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \leftarrow \lambda_1 & & & \\ \hline 15 & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 16 & \cdot & 1 & \cdot & 2 \\ 17 & 1 & -1 & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 4 \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & 5 \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & 6 \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & p_1 \rightarrow & & \\ \hline q_1 \downarrow & & & \\ \hline 15 & 3 & -1 & -1 \\ 16 & -1 & 3 & -1 \\ 17 & -1 & -1 & 3 \end{array} \quad (-23.3)$$

因此可以設

① 如果不做这样的闭路集, 那末把各部分网络中适当的枝纵割而把它的影响分摊給別的枝也行。闭路枝集是把部分网络中的树的枝纵割了以后得到的。

② 各部分闭路用虚线闭曲綫纏在一起的意思跟图 - 20.1 一样, 此外現在合为一个闭路考虑, 所以早就不是独立的了。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \nearrow \mathcal{K}_I' \rightarrow \\ z_{\lambda_1 \times \lambda_1}' = \lambda_1' \downarrow \end{array}
 \begin{array}{c|ccc}
 & 1' & 2' & 3' \\
 \hline
 1' & 3 & -1 & -1 \\
 2' & -1 & 3 & -1 \\
 3' & -1 & -1 & 3
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (-23.4)$$

对于 II 和 III 也同样。

(iii) 把图 -23.3 的 I, II, III 用第一阶段 (i) 的反联络枝

反联接起来以实现原来网络的等价网络, 于是得到图 -23.4 那样的闭路型等价网络。

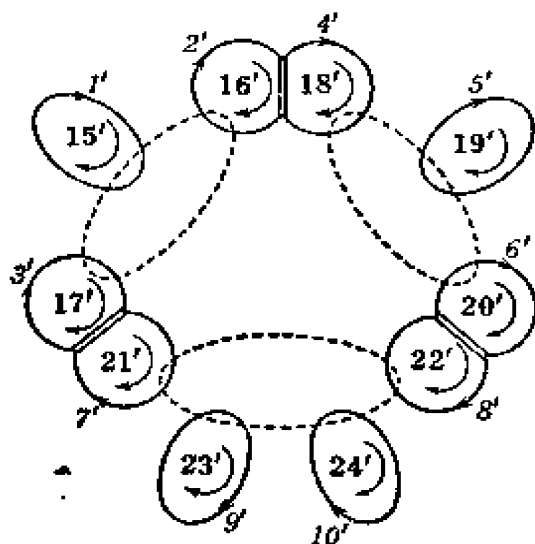


图 -23.4

以上 (i) ~ (iii) 的操作就是“把所设的网络割断做反联络枝集和它的补部分复形, 把所出现的多反树变形作闭路枝集合, 然后用反联络枝联接起来”。

(iv) 这个闭路型等价网络的电源采用的是把原来网络的闭路电压源(闭路电动势) e_q 和枝电

流源 s^{λ} 都包括在内的闭路电压源

$$e_{q'} = e_q - R_q^{-1} z_{\lambda \times} s^{\lambda}. \quad (\text{参考} (-20.7))$$

这里也不妨把各部分网络变形使它们共有一点, 所以可以指望减少节点的数目, 然后采用节点电压 $V_{\nu'}$ 做未知数。求出 $V_{\nu'}$ ②, 再求出闭路电流 $J_{\nu'}$, 这个 $J_{\nu'}$ 就是原来网络的 J^p 。原来网络的 J^p 既然决定, 别的量的决定就不在话下了。

① 如已知的是枝电压源 e_{λ} , $e_q = R_q^{-1} e_{\lambda}$, 如已知的是节点电流源 s^{λ} , s^{λ} 就是 $s^{\lambda} = D_{\lambda \times}^{\lambda} s^{\lambda}$ 的任意解。两者都可以通过计算求得, 不过从接續也可以直接推想出来。

② 在等价网络上的分析也可以依靠实验方法, 不过因为这时候网络实现过程中出现新问题, 所以没有谈到。

两种分裂法，一种是“使部分网络的节点反边界变成开路❶”，另一种是“使部分网络的网孔(面)的边界变成短路❷”，在这意义下，它们完全是对偶的，它们的得失完全决定于网络的形式，联络枝和反联络枝取法的难易，还有能否求得同构的部分网络等等。

§ 24 場的分裂法

一般，在对 2 維或 3 維的連續的物理場問題作近似研究时分裂法也有用处。例如，把图 +24.1 那样的矩形場分成許多小矩形 A, B, C, \dots 等等，依各小区域的性质在一般的边界条件下求解。使这些解沿分界綫适合連續性或其他条件，适当地归并起来就可以求得整个場的解。下面的要求是理所当然的：

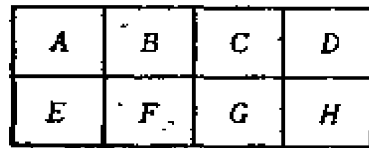


图 +24.1

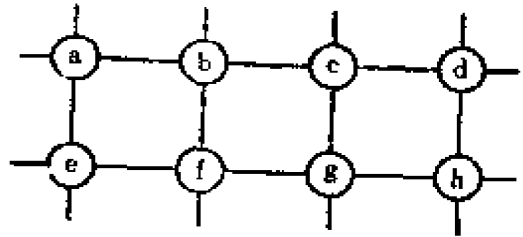


图 -24.1

(i) 通过适当的分割，使近似計算的手續最少。

(ii) 小片的性质稍有变动时，只要更动这小片上的解，对别部分可以計算它的二次的影响然后补正。因此預先把各种各样的解記下来是有用的。

(iii) 便于利用等价的电网络。

要把考察的对象領域分成小領域后再归并，对于图 +24.1 那样的 2 維的場來說，用图 -24.1 那样的反接續是有效的，对于 3 維的場，也可以在各小領域里取适当的（大体上是任意的）点当做核心，然后把把这些小領域間的分界面用联接两个核心的枝代表，于

❶ 切断，横割。

❷ 纵割。

是得到 1 維几何复形 (网络)^[31]。(这个网络相当于原来的 3 維接續的反接續。)若将这个接續上的适当的物理量和原来的一些物理量等同起来,那就完全成了网络的分裂法問題。

例如用这方法来分析电(磁)場时,把电(磁)通适当地积分,当作附属于各枝的量,那末关于这些量的 Gauss 定理就成为 1-Kh 定律。如果把各个电磁場发散体的联络統統割断,各个发散体暫時分別处理,那就是分裂法。另一方面,如果考虑把各枝上的电(磁)場强度綫积分以后所得到的量,那末 Stokes 定理成为 2-Kh 定律。先不考虑若干个电磁場环路間的联络,这样的处理办法就是反分裂法。电(磁)通和电(磁)場間的因果律近似地表现为 Ohm 定律的形式。

当場的和它們的因果关系比較复杂时,可以考虑各种各样适当的对策,引入模拟概念,轉到等价网络,于是也可以采取这种办法。要之,这实际上是以分割为基础的近似解法的某种組織化,在目前情况下,能發揮效用的还只限于綫性問題或者特殊的非綫性問題。

附 录

1 指标記法

向来行列式用 $||$ 表示,矩陣用 \square 或者 $[]$ 表示,这些記号在数值計算上虽然便利,但是在叙述一般理論时有許多不便。叙述一般理論时一个行列式或一个矩陣也有单用一个字母代表的那样一种直記法,不过各种各样元素的内容和相互关系等等不能明显表示出来,因此往往忙于追查开头的假設。指标記法补救了这些缺点,与 $||$, \square 并用是非常有效的。矩陣用它的附有指标的元素的一般項代表,行列式可以用**交換記号** $[]$ 来表示。又指标記法的主要特征是**上下指标**的分別使用,有一对上下指标相同的那种項表示指标取一切可能数值时所得到的所有的項的和。例如 x 若从1变到6,那末

$$D^i_{,x} \dot{x}^x = D^i_{,1} \dot{x}^1 + D^i_{,2} \dot{x}^2 + \cdots + D^i_{,6} \dot{x}^6.$$

在相对論出現以前都写成

$$\sum_{x=1}^6 D^i_{,x} \dot{x}^x.$$

因为經常出現同一的一对上下指标的所有各項之和,所以規定把总和記号 Σ 省掉,这种办法往往称做 **Einstein 簡便法**。在这簡便法下,上面那个式子就相当于矩陣乘积(假定 $i=1, 2, 3, 4$)

$D^1_1 \ D^1_2 \ D^1_3 \ D^1_4 \ D^1_5 \ D^1_6$	\dot{x}^1
$D^2_1 \ D^2_2 \ D^2_3 \ D^2_4 \ D^2_5 \ D^2_6$	\dot{x}^2
$D^3_1 \ D^3_2 \ D^3_3 \ D^3_4 \ D^3_5 \ D^3_6$	\dot{x}^3
$D^4_1 \ D^4_2 \ D^4_3 \ D^4_4 \ D^4_5 \ D^4_6$	\dot{x}^4
$D^5_1 \ D^5_2 \ D^5_3 \ D^5_4 \ D^5_5 \ D^5_6$	\dot{x}^5
$D^6_1 \ D^6_2 \ D^6_3 \ D^6_4 \ D^6_5 \ D^6_6$	\dot{x}^6

在指标記法下的表示法。上面例子中規定每个前指标表示行的号碼,后指标表示列的号碼。象上面例子中1, 2, ... 那样的特定指

标叫**定标**, i 那样的任意指标叫**自由标**, 适用简便法的自由标叫**和标**。象 i, D 那样当做主体的字母叫**主字**(核字母), **单位矩阵**用 A 做主字, 写成 A_i^i, A_j^j 这种样子。

为了使指标记号更有效, 行列式用交换 $[\]$ 表示。规定 $[\]$ 的意义如下: $[\]$ 中的指标经过偶置换以后带 + 号, 经过奇置换以后带 - 号, 把经过所有的置换所得的项加起来, 再用项数除。照这规定, 可以这样写:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} P_{.1}^1 & P_{.2}^1 & P_{.3}^1 \\ P_{.1}^2 & P_{.2}^2 & P_{.3}^2 \\ P_{.1}^3 & P_{.2}^3 & P_{.3}^3 \end{vmatrix} &= 3! \begin{vmatrix} P_{.1}^1 & P_{.2}^2 & P_{.3}^3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} P_{.1}^2 & P_{.2}^2 & P_{.3}^2 \\ P_{.1}^1 & P_{.2}^2 & P_{.3}^3 \end{vmatrix} &= 3! \begin{vmatrix} P_{.1}^1 & P_{.2}^2 & P_{.3}^3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} P_{.1}^3 & P_{.2}^3 & P_{.3}^3 \end{vmatrix} &= 3! \begin{vmatrix} P_{.1}^1 & P_{.2}^2 & P_{.3}^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

交换中重复出现交换时数值不变。因此添上 $3!$ 。

根据这记号, **Cramer 法则** 当作 $P_{.i}^j x^j = y^i (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ 的解来看, 可以表成

$$x^j = \frac{3! 3 A_{[1]}^j A_{[i]}^1 P_{.2}^2 P_{.3}^3}{3! P_{.1}^1 P_{.2}^2 P_{.3}^3} y^i.$$

插进 $||$ 表示这里的指标要从 $[\]$ 中除外。这式子用通常的矩阵表示法写起来是

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} P_{.1}^1 & P_{.2}^1 & P_{.3}^1 \\ P_{.1}^2 & P_{.2}^2 & P_{.3}^2 \\ P_{.1}^3 & P_{.2}^3 & P_{.3}^3 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & P_{.2}^1 & P_{.3}^1 & \cdot & \cdot & P_{.2}^1 & P_{.3}^1 \\ \cdot & P_{.2}^2 & P_{.3}^2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{.2}^2 & P_{.3}^2 \\ \cdot & P_{.2}^3 & P_{.3}^3 & \cdot & P_{.2}^3 & P_{.3}^3 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & P_{.1}^1 & \cdot & P_{.1}^3 & P_{.1}^1 & \cdot & P_{.1}^1 \\ P_{.1}^2 & \cdot & P_{.1}^2 & \cdot & 1 & \cdot & P_{.1}^2 & \cdot & P_{.1}^2 \\ P_{.1}^3 & \cdot & P_{.1}^3 & P_{.1}^3 & \cdot & P_{.1}^3 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & P_{.1}^1 & P_{.1}^2 & \cdot & P_{.1}^1 & P_{.1}^2 & \cdot \\ P_{.1}^2 & P_{.1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & P_{.1}^2 & P_{.1}^2 & \cdot \\ P_{.1}^3 & P_{.1}^3 & \cdot & P_{.1}^3 & P_{.1}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} P_{\cdot 1}^1 & P_{\cdot 2}^1 & P_{\cdot 3}^1 \\ P_{\cdot 1}^2 & P_{\cdot 2}^2 & P_{\cdot 3}^2 \\ P_{\cdot 1}^3 & P_{\cdot 2}^3 & P_{\cdot 3}^3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} y^1 & P_{\cdot 2}^1 & P_{\cdot 3}^1 \\ y^2 & P_{\cdot 2}^2 & P_{\cdot 3}^2 \\ y^3 & P_{\cdot 2}^3 & P_{\cdot 3}^3 \\ P_{\cdot 1}^1 & y^1 & P_{\cdot 3}^1 \\ P_{\cdot 1}^2 & y^2 & P_{\cdot 3}^2 \\ P_{\cdot 1}^3 & y^3 & P_{\cdot 3}^3 \\ P_{\cdot 1}^1 & P_{\cdot 2}^1 & y^1 \\ P_{\cdot 1}^2 & P_{\cdot 2}^2 & y^2 \\ P_{\cdot 1}^3 & P_{\cdot 2}^3 & y^3 \end{vmatrix},$$

又 Laplace 展开是

$$4! P_{\cdot 1}^1 P_{\cdot 2}^2 P_{\cdot 3}^3 P_{\cdot 4}^4 = 4! P_{\cdot 1}^1 P_{\cdot 2}^2 P_{\cdot 3}^3 P_{\cdot 4}^4,$$

Binet-Cauchy 展开是

$$\begin{aligned} & |P_{\cdot x}^a y^{x\lambda} Q_{\lambda}^b| \\ &= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{\cdot 1}^1 & P_{\cdot 2}^1 & P_{\cdot 3}^1 \\ P_{\cdot 1}^2 & P_{\cdot 2}^2 & P_{\cdot 3}^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y^{11} & y^{12} & y^{13} \\ y^{21} & y^{22} & y^{23} \\ y^{31} & y^{32} & y^{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} Q_{\cdot 1}^1 & Q_{\cdot 2}^1 \\ Q_{\cdot 2}^1 & Q_{\cdot 3}^1 \\ Q_{\cdot 3}^1 & Q_{\cdot 4}^1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= 3! (P_{\cdot x_1}^1 y^{x_1 \lambda_1} Q_{\lambda_1}^{11}) (P_{\cdot x_2}^2 y^{x_2 \lambda_2} Q_{\lambda_2}^{22}) (P_{\cdot x_3}^3 y^{x_3 \lambda_3} Q_{\lambda_3}^{33}) \\ &= 3! P_{\cdot x_1}^1 P_{\cdot x_2}^2 P_{\cdot x_3}^3 y^{x_1 \lambda_1} y^{x_2 \lambda_2} y^{x_3 \lambda_3} Q_{\lambda_1}^{11} Q_{\lambda_2}^{22} Q_{\lambda_3}^{33}. \end{aligned}$$

【】是在单用[]会产生混淆的时候采用的。

2 根据 $k(=a^2-R^2)$ 和 $m(=a^0-R^0)$ 数值的接續的分类^①









一切网络可以根据它所包含的独立闭路的数目 k 和独立节点的数目 m 来分类。

附图 1 是独立闭路数目 k 等于 1~5 的一切可能的接續和 $k=6$

附图 2 是独立节点数目 m 等于 1~5 的一切可能的接續。但





































































































① 根据 R. M. Foster^[32]。





















附图 1

$a^2 - R^2 = 1$; , $a^2 - R^2 = 2$; , , $a^2 - R^2 = 3$; , , , , .

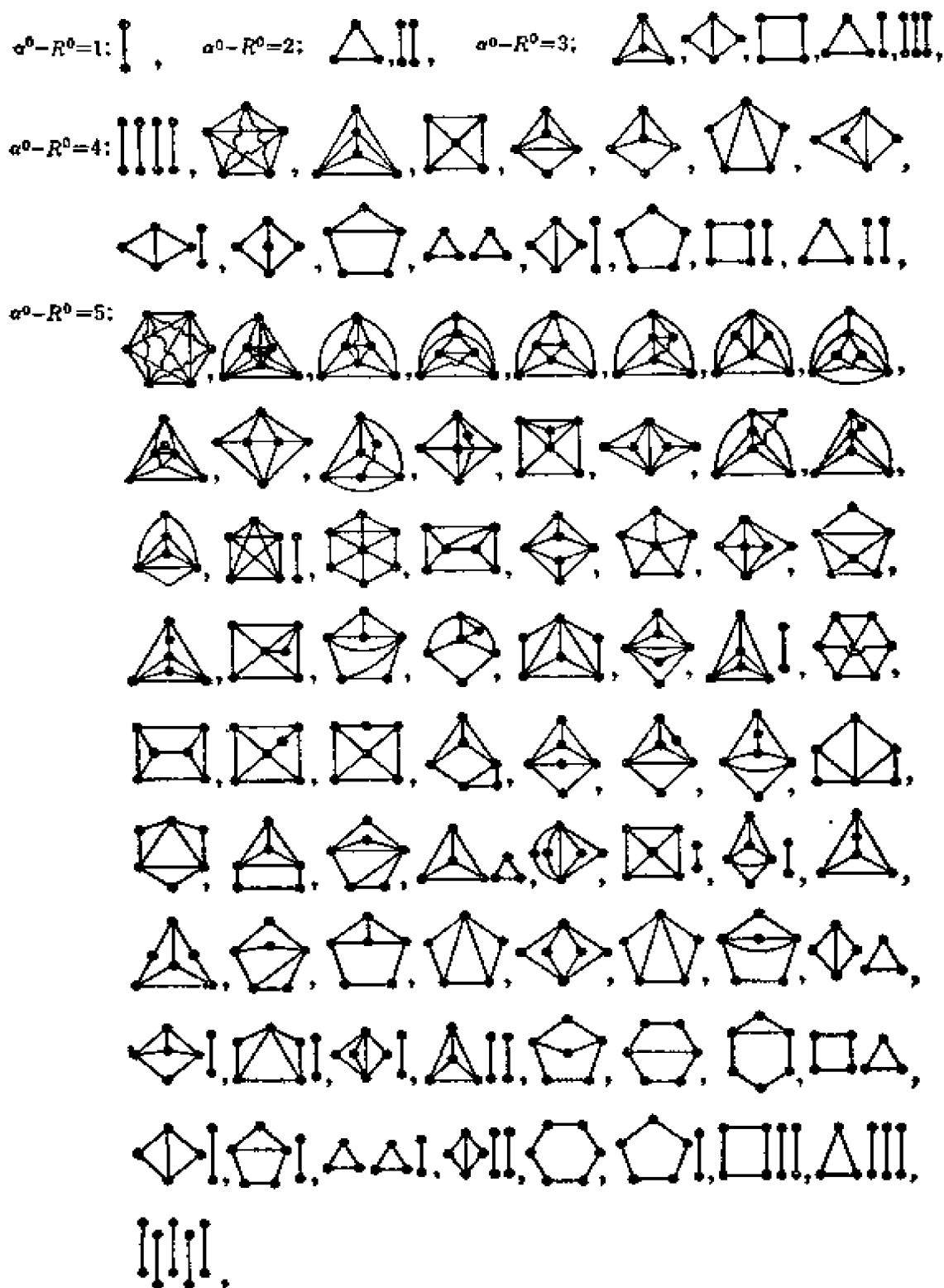
$a^2 - R^2 = 4$; , , , , , , , , , .

, , , , , , .

$a^2 - R^2 = 5$; , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , .

$a^2 - R^2 = 6$; , , , , , , , , , , , , , , , , , , , .

附圖 2



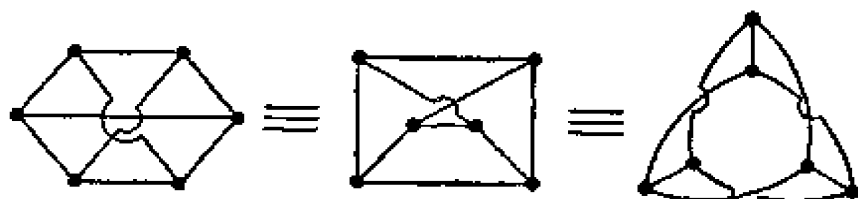
的基本接續^①。但是开枝(不属于任何閉路的枝)不管,串联的枝当作单一的枝看待。

是,单独成为一个孤立閉路的那种单一的枝不管了,并联的枝当作单一的枝看待。

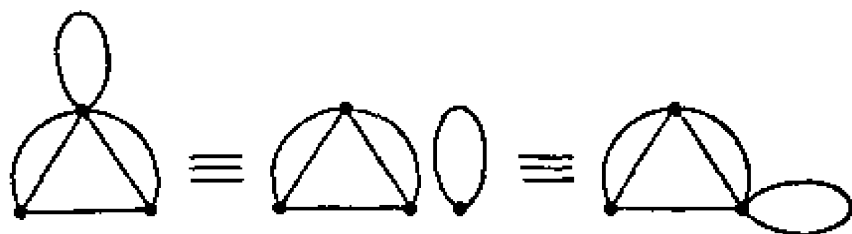
又凡是可以通过下面的操作互相轉变的网络都看作是相同的。

k 固定:

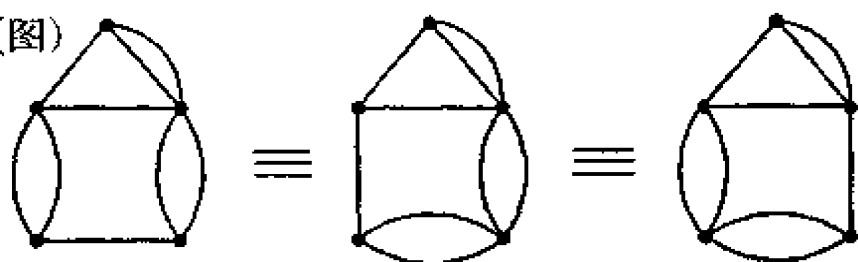
i) 变形(图)



ii) 分离(图)



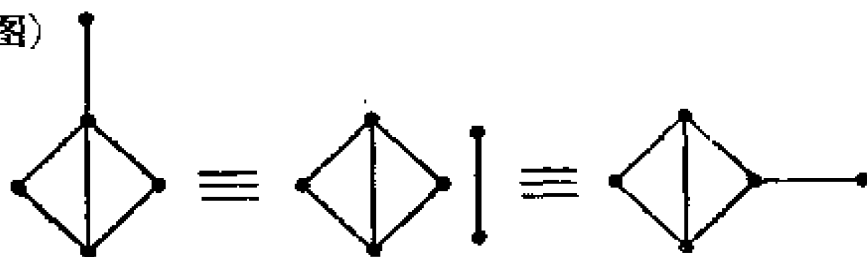
iii) 串联替换(图)



m 固定:

i) 变形 同左(k 固定的情况)。

ii) 分离(图)



iii) 并联替换 包含在变形的情况中。

^① $k=6$ 的一切接續可以从短路这些接續的任何一个枝得到。与此对偶的“ m 固定”的基本接續(用任意开路它的一个枝的办法可以得到所有的接續)有 $m+1$ 节点,任何两点都有一个枝直接联接,所以不再画出来了。

参考文献

序

- [1] O. Veblen: Analysis Situs, 2nd ed. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 5, Part 2 (New York, 1931).
- [2] J. C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism, I, II. 3rd ed. (Oxford Clarendon Press, 1904).

第 1 章

- [3] 河田敬义, 竹内外史: 位相几何学(数学全书)(朝仓书店, 1952).
- [4] S. Lefschetz: Algebraic Topology. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 27 (New York, 1942).
- [5] P. Alexandroff, H. Hopf: Topologie I (Julius Springer, Berlin, 1935).
- [6] S. Okada, R. Onodera: A Unified Treatise on the Topology of Networks and Algebraic Electromagnetism. Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, I (1955), 68~112.

第 2 章

- [7] L. Pontrjagin: Topological Groups. Princeton Mathematical Series, No. 2 (Princeton University Press, 1939).
- [8] M. Iri: Network Theory based upon Topology. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 10 (1956).
- [9] 岡田幸雄, 岩下光男, 富士岳: 位相几何と回路网(1)~(10), 电气通信学会志 42 (1941).
- [10] L. Cremona: Le Figure Reciproche nella Statica Grafica. Opere Matematiche di Luigi Cremona, Tomo Terzo (Milano, 1917), 336~366.
- [11] 福田武雄: 构造力学(应用数学 XII)(河出书房, 1942).

第 3 章

- [12] W. Cauer: Topologische Dualitätssätze und Reziprozitätstheoreme der Schaltungstheorie. Z. A. M. M., 14, 6 (1934), 349~350.

- [13] W. Caner: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, I (Leipzig, 1941).
- [14] K. Kondo, M. Iri: On the Theory of Trees and Cotrees. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 17 (1956).
- [15] I. Oederbaum: Invariance and Mutual Relations of Electrical Network Determinants. Journal of Mathematics and Physics, 24, 4 (1956), 236~244.
- [16] M. Iri: On the Fundamental Theorems used in the Analysis of Trees and Cotrees. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 26 (1957).
- [17] R. Otter: The Number of Trees. Annals of Mathematics, 49, 3 (1948), 583~599.
- [18] M. Iri, R. Onodera, K. Kondo: A Theory of Multi-Trees and Multi-Cotrees and its Application to the Analysis of 2-Trees and 2-Cotrees. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 30 (1957).

第 4 章

- [19] 岡田幸雄: 回路网序論。电气通信学会志 27, 12 (1943), 9~22.
- [20] Y. Miyazaki: Direct and Intuitive Analysis of Electric Networks. Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, I (1955), 113~171.
- [21] W. S. Percival: The Solution of Passive Electrical Networks by means of Mathematical Trees. Proceedings of the I. E. E., 100, III, 65 (1953), 143~150.

第 5 章

- [22] Hardy Cross: Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, Transactions of A. S. C. E., 96 (1932), 1~10.
- [23] R. V. Southwell: Relaxation Methods in Engineering Science (Oxford Clarendon Press, 1940).
- [24] R. V. Southwell: Relaxation Methods in Theoretical Physics. (Oxford Clarendon Press, 1946).
- [25] G. Kron: A Set of Principles to Interconnect the Solutions of Physical Systems. Journal of Applied Physics, 24, 8 (1953), 965~980.
- [26] G. Kron: A Method to Solve Very Large Physical Systems in Easy Stages. Proceedings of the I. R. E., 42, 4 (1954), 680~686.
- [27] J. P. Roth: The Validity of Kron's Method of Tearing. Proceedings of

- Nat. Acad. Sci., 41, 8 (1955), 599~600.
- [28] R. E. Wengert: Simple Diakoptics. Matrix and Tensor Quarterly, 5, 4 (1955), 129~135.
- [29] R. Onodera: Dual Diakoptics. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 11 (1956).
- [30] R. Onodera, N. Ishiyama: Diakoptics and Codiakoptics. Bulletin of Yamagata University, 4, 2 (1957), 235~253.
- [31] S. Okada, R. Onodera: Algebraification of Field Laws of Physics by Poincaré Process. Bulletin of Yamagata University. Natural Science, 1, 4 (1951), 397~404.

附 录

- [32] R. M. Foster: Geometrical Circuits of Electrical Networks. Transactions of A. I. E. E., 51, 2 (1932), 309~317.

最近两三年来, R. A. A. G. Research Notes, 2nd Series, Nos. 5, 6, 7, 10, 11, 14, 17, 22, 25, 26, 27, 30, 31 中提出的許多内容也收罗在本书内, 有些只介绍结果, 詳細报告都预定要发表在一两年内刊行的

Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, Vol. II.

此外討論一般有关問題的参考书有

- [33] K. Reidemeister: Knotentheorie (Julius Springer, Berlin, 1932).
- [34] W. Blaschke, G. Bol: Geometrie der Gewebe (Julius Springer, Berlin, 1938).